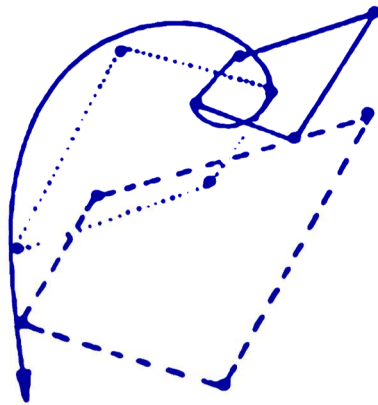




*Programa de Pós-Graduação em Música  
Universidade Federal do Rio de Janeiro*

*Anais do Congresso  
Nacional de Música e Matemática*

*(edição 2017)  
2594-9128*



*Rio de Janeiro, 2020*



Anais do II Congresso Nacional de Música e Matemática. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola de Música, Programa de Pós-Graduação em Música, 2017.

ISSN: 2594-9128

# **Universidade Federal do Rio de Janeiro**

## **Comissão Organizadora**

Carlos de Lemos Almada  
Daniel Moreira de Sousa  
Liduino Pitombeira  
Pauxy Gentil-Nunes

## **Editor**

Daniel Moreira de Sousa

## **Comissão científica**

Alexandre Reche  
Carlos de Lemos Almada  
Gabriel Pareyon  
Marcos Sampaio  
Liduino Pitombeira  
Pauxy Gentil-Nunes  
Rodolfo Coelho de Souza

## **APRESENTAÇÃO**

A confluência entre Música e Matemática tem se mostrado como uma das mais frutíferas abordagens musicais na produção de teorias composicionais e analíticas, principalmente considerando a intensa produção teórica que vem sendo produzida a partir do século XX. Essa expansão do campo motivou a criação tanto do Grupo de Pesquisa MusMat, sediado no Programa de Pós-Graduação em Música, quanto do Congresso Nacional de Música e Matemática, cuja primeira edição ocorreu na Universidade Federal do Rio de Janeiro em 2016, reunindo pesquisadores de diferentes partes do Brasil. Nessa segunda edição, realizada em 2017, trouxe à tona um rico e diversificado conjunto de abordagens e perspectivas, ampliando consideravelmente o espectro abrangido em sua primeira edição. As conferências, comunicações, painéis e debates no decorrer do congresso apresentaram instigantes discussões sobre correlações entre aspectos teóricos e práticos musicais e diversos ramos da matemática (como as teorias dos números, dos grafos, computação, inteligência artificial, geometria, sistemas formais etc.), envolvendo ainda conexões com campos afins aparentemente mais distantes, como bioquímica e genética.

# SUMÁRIO

*Arthur Faraco*

**ALIQUID STAT PRO ALIQUO: CINCO COMPOSIÇÕES COM NOTAÇÃO TEXTUAL PARA INSTRUMENTAÇÃO LIVRE: CRIAÇÃO E ANÁLISE DE COMPOSIÇÕES COM ABERTURA À IMPROVISAÇÃO** \_\_\_\_\_ 4

*Carlos de Lemos Almada, Claudia Usai Gomes, Igor Chagas, João Penchel e Max Kühn*

**A GEOMETRIA DAS RELAÇÕES PARCIMONIOSAS EM MÚSICA POPULAR** \_\_\_\_\_ 14

*Lucas Bracher*

**ECCO! - UMA LINGUAGEM COMPUTACIONAL PARA DESCRIÇÃO E ESTUDO DE TEMPERAMENTOS MUSICAIS** \_\_\_\_\_ 29

*Marcelo Birck e João Lazzarin*

**DO USO DE TETRACORDES NA CONCEPÇÃO DE UM JOGO DE ANÁLISE E COMPOSIÇÃO MUSICAL** \_\_\_\_\_ 36

*Max Kühn, Claudia Usai, Rodrigo Pascale, Liduino Pitombeira e Pauxy Gentil-Nunes*

**UTILIZAÇÃO DO APLICATIVO DE OPERAÇÕES LINEARES OPLIN COMO FERRAMENTA DE MODELAGEM SISTÊMICA** \_\_\_\_\_ 50

*Desirée Mayr e Carlos de Lemos Almada*

**MATHEMATICAL AND BIOLOGICAL REPRESENTATIONS IN DERIVATIVE ANALYSIS** \_\_\_\_\_ 61

*André Codeço dos Santos e Liduino Pitombeira*

**DOMÍNIO SONORO: CONCEITOS E APLICAÇÕES NA ANÁLISE DO III MOVIMENTO DO OP.11, DE WEBERN** \_\_\_\_\_ 76

## ***Aliquid Stat pro Aliquo: Cinco composições com notação textual para instrumentação livre: criação e análise de composições com abertura à improvisação***

Arthur Faraco  
arthurfaraco67@gmail.com

**Resumo:** Neste trabalho serão realizadas análises sobre ideias da criação dentro da música nova, especificamente no campo de composições musicais que possuam uma abertura intrínseca à improvisação musical. Consiste em analisar peças com notações que se adequem a tal abertura e, a partir da análise destas, trabalhar o próprio processo criativo, compondo um conjunto de peças com tal característica. Também será analisada a peça *Composition no. 245* do compositor Anthony Braxton, a fim de entender o processo criativo do autor e como funciona sua notação

**Palavras-chave:** Composição. Improvisação. Processos Criativos. Notação

***Aliquid Stat Pro Aliquo: Five Compositions with Textual Notation for Free Instrumentation: Creation and Analysis of Compositions with Openness to Improvisation***

**Abstract:** In this work it will be realized some analysis about creation ideas inside the new music aesthetics, specifically in the field of musical compositions that have an intrinsic openness to musical improvisation. It will consist in the analysis of pieces with a notation that have that openness, and after those analyses, the creational process, by composing a group of musical pieces with the characteristics that were cited. It will be also analyzed the piece *Composition no. 245*, by Anthony Braxton, for to understand the creative process of the author and how does his notation work.

**Keywords:** Composition. Improvisation. Creative Process. Notation.

### **1. Introdução**

Composição e improvisação são temas amplamente estudados, e até hoje provocam debates na literatura que devem ser abordados a aprofundados (FURLANETE, 2010, p. 1; STENSTRÖM, 2009, p. 165; ZAMPRONHA, 1996, p. 116). Na história da música ocidental podemos perceber uma grande valorização e até mitificação da composição, sendo esta um processo criativo com maior destaque que a improvisação, processo majoritariamente na formação musical. Pouco estudada, a improvisação volta atualmente a possuir um espaço acadêmico, sendo um tema com grande abertura para pesquisa e aprofundamento (FURLANETE, 2010, p. 1; STENSTRÖM, 2009, p. 165; ZAMPRONHA, 1996, p. 116).

Ao estudarmos esses temas, percebemos que sempre há uma grande valorização da figura do compositor, que é o “grande criador”, e sua obra, sua composição, é imutável, sendo que suas interpretações são aproximações da intenção real do compositor, e esta nunca será perfeitamente executada (FURLANETE, 2010, p.2; ZAMPRONHA, 1996, p. 116). Composição é aquilo que está escrito, que pode ser reproduzido várias vezes, porém sem perder seu caráter; deve ser passível de

reconhecimento por parte dos ouvintes e sua execução pode ser feita por inúmeros intérpretes sem que se altere bruscamente. A composição deve possuir uma “reprodutibilidade”, uma “reconhecibilidade”. (STËNSTROM, 2009, p. 165). Essas definições demonstram certo tradicionalismo ao conceituar composição. Álvares (2014) diz que a grande característica da composição é a de o compositor possuir a capacidade de pensar a peça e construí-la anteriormente à sua execução. Ou seja, a obra possui uma liberdade de ser alterada caso o compositor não goste de determinada parte, e ele possui o tempo necessário para criá-la do jeito que a imagina.

Tendo em vista esses conceitos de composição, percebemos que ocorre certo extremismo na separação entre composição e improvisação na visão de alguns autores. Composição é aquilo que é escrito, improvisação não; a composição é vista como um produto, sendo que a improvisação deve ser vista como um processo (STËNSTROM, 2009, p. 165). A improvisação é aquilo que não é escrito, feito na hora, em que os músicos possuem relações diretas entre si (enquanto na composição os músicos possuem uma relação direta apenas com sua partitura; o compositor possui uma relação indireta com os músicos) (STËNSTROM, 2009, p. 167). Percebe-se certa polarização entre os termos.

A partir do século XX e com o surgimento da música moderna, o conceito de compositor perde um pouco de força, porém se mantém no centro, ainda é a figura principal (FURLANETE, 2010, p.1). Entretanto, novos meios de aberturas surgem nas peças, e se tornarão mais intensos na música pós segunda guerra mundial, a partir de conceitos como a estética da indeterminação, o que abre para interpretações muito mais livres da obra, já que o intérprete torna-se uma figura atuante, não só um reproduzidor (FURLANETE, 2010, p. 1; ZAMPRONHA, 1996, p. 116).

Assim, composições com notações gráficas, música eletroacústica, as improvisações dirigidas e outros meios de composição na música nova criam uma negação à ideia de que a composição deve possuir uma reprodutibilidade (já que a abertura na obra deixa espaço para interpretações que se alteram; cada intérprete terá uma interpretação única, e assim a cada reprodução a obra irá se alterar, obtendo uma nova forma, uma nova escuta), à ideia que tenha uma relação indireta com o intérprete, e que ela se distancie da improvisação, sendo que são vistas como formas de arte polarizadas, uma em cada extremo. O compositor não é mais o centro, mas apenas parte do processo criativo que é a música, assim como faz parte desse processo

o intérprete, o ouvinte, a gravação da peça, suas reproduções, etc. (ZAMPRONHA, 1996, p. 117).

Tendo em vista esses conceitos, percebemos que surge uma zona em que composição e improvisação se tocam - surge a liberdade dentro das composições e as predeterminações dentro das improvisações (PRITCHETT, 2001, p. 7). Porém não há como analisarmos qual limite de predeterminações caracteriza uma improvisação ou qual limite de abertura caracteriza uma composição, pois cairíamos em questões subjetivas de escuta e também semânticas. Assim, devemos analisar os processos criativos que surgem nessas peças que possuem abertura, para que possamos localizar características composicionais e características da improvisação, tendo em vista se realmente esses dois processos se interligam (já que há extremismos em relação a isso). Logo, a partir das análises foram compostas peças que possuem tais características, tendo em si uma abertura, partindo das ideias de abertura por meio da notação, como a ideia do uso da notação textual.

Essas composições foram gravadas e debatidas a fim de se atingir o objetivo final do trabalho, sendo este escrever sobre o processo criativo e como este se deu no caminhar das composições e a visão dos intérpretes que realizaram as obras escritas, a fim de se perceber como a partitura da peça influenciou-os a tocar.

## **2. A música como processo**

Como visto, será trabalhada a zona cinza que existe entre composição e improvisação, abrangendo principalmente obras com aberturas, como improvisações dirigidas e composições que abrangem a aleatoriedade. Estas não são resultados de um único processo criativo, o do compositor, mas sim um processo em si, abrangendo compositor-intérprete-ouvinte (FURLANETE, 2010, p. 2; ZAMPRONHA, 1996, p. 116). Logo, devemos primeiramente demonstrar que a figura central do compositor é ultrapassada; ele não é mais o centro criativo da obra, não existe uma intenção única. Furlanete (2010, p. 1) traz três processos que descrevem essa desconstrução da figura do compositor: uma abertura inerente à estética, a vontade de compartilhar o material com outros agentes do processo (o intérprete e o ouvinte) e a introdução de estratégias composicionais que utilizam processos estocásticos. Assim, já se cria uma nova visão do compositor, este não como o centro do processo criativo, mas sim como uma parte igualmente relevante do processo que envolve muitos outros aspectos (ZAMPRONHA, 1996).



Pritchett (2001, pg. 7), ao abordar a interpretação do pianista David Tudor em uma composição de John Cage (Variations II) aborda a questão da figura do compositor de uma maneira relacionada à figura “desconstruída”. Ao analisar a obra de Cage (que possui uma grande abertura para interpretações), percebeu que Tudor realizou uma nova composição a partir do que já havia sido estabelecido, pré-determinado para ele em partitura (PRITCHETT, 2001, p. 7). Cage é o compositor da peça, mas é apenas parte do processo: Tudor, em sua interpretação, a fez de uma maneira que se tornou praticamente “independente” da partitura original, dando a ela um novo caráter, quase como uma nova composição. Assim, também é parte desse processo, dando novas direções e interpretações à peça; o compositor traz sua bagagem cultural dentro de sua peça, em que o intérprete, em sua leitura da obra, também irá depositar aspectos de sua bagagem histórica, e assim por diante, dando sentido ao processo. (FURLANETE, 2010, p. 1-2; PRITCHETT, 2001, p. 7; ZAMPRONHA, 1996, p. 117)

Porém, essa concepção de compositor não é consensual e possui divergências, sendo que a concepção tradicional da figura do compositor ainda é muito trabalhada. Percebe-se, ao relacionar composição com improvisação, que Stenström (2009) trabalha com essa visão tradicional para que se atinja um objetivo, que é demonstrar as diferenças entre a composição e a improvisação. Assim, trabalha com conceitos que não abrangem a ideia do compositor como parte do processo, pois composição é tudo aquilo feito por apenas uma pessoa, escrita e fechada, sendo que ela deve possuir certa “reprodutibilidade”, ou seja, para vários intérpretes a composição deve ser praticamente a mesma, sendo que, ao ser escutada em diferentes interpretações seja reconhecida (STENSTRÖM, 2009, p. 167). A improvisação é o extremo oposto. É realizada na hora, sem pré-determinações (em um âmbito geral) e não tem a necessidade de possuir uma “reprodutibilidade”, pois ela é única, e nunca será igual (STENSTRÖM, 2009, p. 170). Logo, composição e improvisação são opostos; não possuem relações diretas.

Ao analisarmos as características das obras que serão abrangidas nesse trabalho, percebe-se que a ideia de composição e improvisação como opostos não é adequada. A reprodutibilidade da composição já não é algo concreto, já que muitas obras com abertura possuem resultados de interpretações que são sonoramente opostas umas às outras; a realização de Variations II de David Tudor é única: outras interpretações possuem sonoridades extremamente diferentes (PRITCHETT, 2001).

O argumento de que a grande característica da improvisação é que ela é única (STENSTRÖM, 2009, p. 170) é falha, já que essa também é uma característica de certas composições. A concepção do compositor como figura única do processo criativo já foi desconstruída nos parágrafos anteriores. Concluimos que a composição e a improvisação não são tão opostos assim, como mostrado no texto de Stenström; elas possuem uma relação mais estreita.

Deve-se ter em vista sempre a questão processual (FURLANETE, 2010; p. 1; ZAMPRONHA, 1996, p. 117), em que o compositor não é figura central do processo, apenas uma parte. Ao desconstruirmos esse ideal de compositor tradicional, abrimos caminhos para estudarmos as relações entre composição e improvisação, pois temos um número maior de participantes no processo: o intérprete e o ouvinte (FURLANETE, 2010; ZAMPRONHA, 1996), que trabalham em conjunto, mesmo que indiretamente. E cada participante do processo atribui um novo significado, uma bagagem histórica que dá alterações no processo, e logo, na música. Tomaremos essas ideias como base para análise da questão do texto. São ideias essenciais para o entendimento da relação entre composição e improvisação.

### **3. Notação como peça fundamental à abertura**

Dentro do paradigma tradicional da notação (não só musical, mas da escrita em maneira geral) possuímos a ideia da representação como uma característica secundária, imperfeita, em que o objeto a ser representado tem uma transcendência à própria notação. Logo, a escrita não é apta a captar a essência do objeto a qual irá representar. Ela é imperfeita, pois se afasta do objeto (PLATÃO, p. 108; ZAMPRONHA, p. 34). Podemos correlacionar tal ideal do paradigma tradicional com a ideia de que em música a ideia do compositor é em si transcendente à sua escrita. Ou seja, a partitura é uma representação afastada do ideal do compositor (ZAMPRONHA, 1996, p. 116). Logo, a partitura é um mero aparato (e dentro deste paradigma é considerado falho) de representação de uma ideia musical que é superior; uma ideia platônica, um “belo em si” (PLATÃO, p. 110; ZAMPRONHA, p. 34).

A partir de tal noção, perpetua-se o que Derrida chama de “metafísica da presença”, em que, segundo Zampronha (p. 33)

“é metafísica pois aquilo que a representação (ou escrita, notação) transmite não é ela mesma, é transcendente a ela. E é presença pois as representações procuram dar a impressão de que aquilo que representam está ali, de fato, verdadeiramente presente.”

Em relação às composições musicais, pode-se dizer que o paradigma tradicional reforça a ideia de que a partitura não é influente no processo da criação artística. Ela é imperfeita, e não atinge o transcendental que é a ideia do compositor.

Em contrário ao paradigma tradicional da representação, temos as ideias de Derrida sobre os signos. Para ele, o objetivo final da representação (que seria o ideal platônico) não existe. O que realmente existe é uma cadeia infinita de signos, que para ele, são as próprias representações. (ZAMPRONHA, p. 34). Os signos possuem duplo aspecto: um caráter representativo em que se cria uma imagem (a ideia – a imagem acústica segundo Saussure); e o caráter re-presentativo, ou seja, a palavra que remete também à ideia (ZAMPRONHA, p. 34). Logo, de acordo com Derrida, não há um signo primeiro; o que ocorre é uma cadeia infinita de representações e re-presentações (ou rerepresentações), que geram novos signos infinitamente.

Para constatar o surgimento do signo, Derrida cria o termo “diferência”, que “é o processo pelo qual as marcas aparecem e constituem os signos” (ZAMPRONHA, p. 35) – o signo é formado pela constituição de marcas. Porém, como não existe um signo “base”, algo externo aos signos, transcendente, o significado surge a partir da própria diferença de marcas entre os próprios signos. Segundo Derrida: “Um significado não é mais do que um significante posto numa certa posição por outros significantes: não existe significado ou sentido, só há efeitos” (ZAMPRONHA *apud* DERRIDA, 1991, p. 34). Todos os significados são consequências de vários outros significantes – estes não se separam, são unidos dentro do que ele chama de signo (diferentemente de Saussure, que diferencia as ideias de significante e significado).

Em oposição à ideia platônica de representação, dentro do processo criativo das peças desta pesquisa tomaremos como base a ideia da criação artística como processo (ZAMPRONHA, 1996, p. 129) e da notação como parte fundamental à abertura da obra (PUIG, p. 4). Logo, será trabalhada a ideia do signo como representação em si, e da interpretação dos signos a fim da criação de novos signos que será a representação musical (dentro do processo que é a criação artística). Logo, a ideia de notação se expande: esta é parte do próprio processo de criação. E a partir do contato do intérprete com a notação ocorre o movimento da criação da obra musical.

#### **4. Materiais e Métodos**

Para que ocorra uma pesquisa na qual composição e improvisação sejam tomados como processos covalentes, deve-se realizar estudos sobre o próprio processo criativo, o qual abrangerá tal ideia. Assim, foram realizadas composições nas quais os aspectos de abertura notacional e conceitos de improvisação livre e improvisação dirigida foram tomadas como essenciais, a partir da ideia de que a notação textual,

levada em conta devido à influência da linguística, gera esta abertura na qual o intérprete é agente criador. Foi escrita uma peça na qual há cinco movimentos, cada uma com aspectos diferentes, para que a pesquisa em arte seja válida.

A partir da composição, são realizadas performances e gravações das peças criadas, a fim de que se gere uma discussão entre compositor e intérpretes por meio de grupos focais sobre a interação destes com as peças que lhes foram atribuídas. Assim, cada intérprete traz suas concepções sobre as aberturas que a peça traz, validando (ou não) o seu ato criativo dentro desta. Os debates foram realizados em caráter de grupos focais, no qual o pesquisador formula perguntas base para que o grupo discuta – o pesquisador é também um moderador, direcionando o debate ao tema relevante à sua pesquisa.

Por fim, a análise realizada sobre a peça Composition no. 245 do compositor Anthony Braxton traz à tona aspectos notacionais que explicitam a notação tradicional e a notação gráfica (aberta), no qual o intérprete é levado a estas duas concepções de interpretação, e é notado como ele trabalha e como se dá o ato criativo a partir de composições que possuem tais tipos de abertura.

## **5. Resultados e discussões**

Percebeu-se ao longo de todo o trabalho uma grande liberdade ao encontrar as referências para a base do processo criativo. Sendo o processo criativo algo subjetivo, pude realizar as composições de maneira que a liberdade fosse colocada em primeiro lugar. O trabalho traz à tona o resultado de pesquisas e leituras diversas sobre o tema proposto (composições com aberturas à improvisação), tema este que é abordado por inúmeros autores e compositores, não só da música contemporânea, mas em todos os capítulos da história da música.

Como tal tema é de grande abrangência, tive que escolher qual método utilizaria nas composições a fim de atingir o objetivo: alcançar a liberdade do intérprete para que este não seja simplesmente uma máquina de criar acasos, mas que seja uma parte influente do processo criativo da obra: que ele seja um fator de criação dentro da peça. Por isso, a escolha da notação textual. Esta notação traz à tona características subjetivas para a obra: a interpretação do texto por parte do intérprete. Esta notação textual não traz em si aspectos ou direções realmente musicais, mas surgem como poesia, como textos diversos que abrem para interpretação, nos quais o intérprete pode tomar várias direções, de acordo com seu contato com o texto.

Assim, pode-se perceber o porquê da influência da linguística dentro das composições. Essa surge no trabalho como base do próprio processo criativo, já que a ideia de significação dentro da teoria linguística de Derrida é o grande passo para que o intérprete se liberte de interpretações pragmáticas e direcionadas, a fim de se atingir uma liberdade para que possa tocar a peça. A peça possui uma direção, porém não é uma direção estabelecida pelo ideal do compositor, mas pelo ideal subjetivo do intérprete. A composição altera a maneira de pensar do intérprete, porém não interfere em sua liberdade de criar e gerar algo significativo dentro da peça. Esta seria a “zona cinza” citada na introdução do texto, na qual o músico trabalha como agente criador na obra, criando uma visão descentralizada do papel da composição e do compositor. Surge a ideia da música como um processo, em que não só o ideal composicional prevalece, mas sim um processo criativo no qual participam o compositor, o intérprete e o ouvinte.

Cada composição trouxe em si uma característica que a torna única, porém a obra deve ser tomada como um todo, como movimentos separados de uma peça, já que a ideia principal é perceber como cada texto (que possuem inúmeras semelhanças em caracteres de composição) influencia o intérprete e como este cria a partir de cada partitura, podendo realizar a comparação com as outras.

Por fim, o objetivo final das composições foi atingido, e prevalece a obra para que possam ser interpretadas continuamente, tanto pelo grupos do Coletivo de Livre Improvisação Contemporânea, aos quais dedico esta peça, quanto a grupos e músicos que tenham o interesse no trabalho da improvisação a partir de notações não tradicionais.

Cabe ressaltar que a ideia primária da análise da peça de Anthony Braxton era a realização de uma comparação de uma peça com escrita semelhante à tradicional (com algumas modernizações) e uma notação gráfica não tradicional, que são, como visto, partituras secundárias que fazem parte do todo da peça. Ao estudar e tomar contato com o processo criativo de Braxton percebeu-se que este é de uma grande complexidade, no qual diversas características únicas devem ser levadas em conta. Na análise da partitura, inúmeras ideias surgiram, de maneira que a quarta composição toma como influência algumas ideias de Braxton e o processo criativo das GMT's. Porém, estas são tomadas como uma base para a criação do texto da partitura, não como uma reformulação das ideias das GMT's, já que estas não caberiam dentro do objetivo primário do processo criativo do trabalho.

Ao realizar uma análise pela escuta, tornou-se maior tal complexidade vista em seu trabalho, já que na execução percebem-se inúmeros detalhes que devem ser tomados em conta e necessitam de uma análise mais profunda da obra, além de um conhecimento grande de todo o repertório de composições que seguem o modelo das GMT's, além de todo repertório e histórico musical de Anthony Braxton. Devido a tais aspectos, deixo alguns pontos que se tornariam secundários nesta pesquisa para uma futura pesquisa, na qual será aprofundada os estudos sobre as GMT's e suas execuções.

O trabalho composicional e de análise trouxeram inúmeros benefícios complementadores à formação musical que presencio na graduação. A realização de uma pesquisa que teve como resultados uma peça com cinco composições inéditas, gravadas e debatidas, foi com certeza de uma grande importância para o desenvolvimento de um músico em graduação, com ideias futuras para pesquisa.

O trabalho realizado a partir da análise da peça de Anthony Braxton foi de extrema importância devido ao seu conteúdo gerado e do contato realizado com uma fundação de pesquisa internacional. Logo, a partir de toda a pesquisa feita, surgiu a possibilidade de um trabalho de pesquisa direcionado somente às GTM's, possivelmente um trabalho de mestrado para a continuidade do trabalho de análise e composição a partir de Braxton, o que é de grande importância para um aluno em final de graduação.

### **Referências:**

ASCHIDAMINI, Ione Maria; SAUPE, Rosita. Grupo Focal – Estratégia metodológica qualitativa: um ensaio teórico. **Cogitare Enfermagem**, v. 9, n. 1, p. 9-14, 2004.

**A Teus Pés, de Ana Cristina César.** Disponível em: [http://www.passeiweb.com/estudos/livros/a\\_teus\\_pes](http://www.passeiweb.com/estudos/livros/a_teus_pes). Acessado em 10/08/2016.

BACKES, Dirce Stein *et al.* **Grupo focal como técnica de coleta e análise de dados em pesquisas qualitativas.** O Mundo da Saúde, São Paulo, 2011.

DUARTE, Pedro. A conquista espacial de Mark Rothko. **Dois pontos**, Curitiba, São Carlos, vol. 11, n.1, p. 167 – 182, 2014.

FOUCAULT, Michel. **Ceci n'est pas une pipe.** University of California Press, Londres, 1983.

FURLANETE, Fábio Parra. **Modelagem de interações musicais com dispositivos informáticos** – Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas – Instituto de Artes - Campinas, SP: [s.n.], 2010. [Orientador: Prof. Dr. Jonatas Manzolli]

**JOHNSON, S.** (1994). Rothko. Chapel and Rothko's Chapel. **Perspectives of New Music**, 32(2), 6-53. doi:1. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/833598> doi:1

PRITCHETT, James. **David Tudor as Composer/Performer in Cage's Variations II**. Leonardo Music Journal, v. 14, 2004.

STENSTRÖM, Harald. **Free Ensemble Improvisation**. University of Gothenburg - 2009

ZAMBONI, Silvio. **A pesquisa em arte: um paralelo entre arte e ciência**. Autores Associados, Campinas, 2006.

ZAMPRONHA, Edson S. ONDE ESTÁ A MÚSICA? **ARTEunesp**, v. 12, São Paulo, 1996.

ZAMPRONHA, Edson S. **Notação, Representação e Composição: um novo paradigma da escritura musical**. São Paulo: Annabiume, FAPESP, 2000.

## ***A geometria das relações parcimoniosas em música popular***

Carlos de Lemos Almada

Universidade Federal do Rio de Janeiro – [carlosalmada@musica.ufrj.br](mailto:carlosalmada@musica.ufrj.br)

Claudia Usai Gomes

Universidade Federal do Rio de Janeiro – [clauusaigom@hotmail.com](mailto:clauusaigom@hotmail.com)

Igor Chagas

Universidade Federal do Rio de Janeiro – [chagasquitarr@yahoo.com.br](mailto:chagasquitarr@yahoo.com.br)

João Penchel

Universidade Federal do Rio de Janeiro – [joaopenchel@hotmail.com](mailto:joaopenchel@hotmail.com)

Max Kühn

Universidade Federal do Rio de Janeiro – [max-kuhn@hotmail.com](mailto:max-kuhn@hotmail.com)

**Resumo:** Este artigo apresenta uma proposta de expansão teórico-metodológica do Sistema PK (ALMADA, 2017a; 2017b), que visa essencialmente ao estudo das relações entre tétrades em música popular, a partir de uma perspectiva baseada nas teorias neorriemanniana e transformacional. A referida proposta aborda especificamente a representação geométrica das conduções parcimoniosas das vozes dos acordes, considerando integralmente suas cardinalidades originais. Alguns conceitos e recursos de quantificação dos dados analíticos são apresentados, seguindo-se uma aplicação prática com a análise de um trecho da canção *Luiza*, de Tom Jobim.

**Palavras-chave:** Representação Geométrica em Música. Teorias Neorriemanniana e Transformacional. Música Popular. Conduções Parcimoniosas de Vozes.

### **The Geometry of Parsimonious Relations in Popular Music**

**Abstract:** This paper presents a proposal for theoretical-methodological expansion of the PK System (ALMADA, 2017a; 2017b), which essentially aims at studying seventh-chord relations in popular music, based on the Neo-Riemannian and Transformational Theories. This proposal addresses specifically the geometrical representation of parsimonious voice-leading, considering the integrity of the original chord cardinalities. Some concepts and quantification resources are introduced, which is followed by a practical application with an analysis of a passage extracted from the song *Luiza*, by Tom Jobim.

**Keywords:** Geometrical Representation in Music. Neo-Riemannian and Transformational Theories. Popular Music. Parsimonious Voice-Leading.

### **1. Introdução**

O presente trabalho faz parte de um projeto de iniciação científica dedicado a estudos estruturais em música popular, vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Música da UFRJ. Desenvolve uma investigação específica sobre novas elaborações e aplicações de princípios da Teoria transformacional (LEWIN, 1982) no exame de relações tonais em canções do repertório popular. Dois desdobramentos práticos vêm sendo realizados, envolvendo o cancionário de Antônio Carlos Jobim (KÜHN *et al*, 2017a) e a obra dos Beatles (KÜHN *et al*, 2017b). Este artigo tem como objetivo focalizar no mapeamento das relações de parcimônia, que consiste em uma das



ramificações da teoria das representações geométricas do sistema PK (ALMADA, 2017a).

## 2. Fundamentação teórica

O sistema PK, destinado à análise transformacional dos acordes de sétima comumente empregados em música popular, tem suas bases derivadas do Sistema de Transformações Cromáticas de David Kopp (KOPP, 2002). O sistema de Kopp esgota as possibilidades de conexão entre duas tríades perfeitas que mantenham ao menos uma nota em comum, formando um conjunto de 13 operações transformacionais. Tal número foi consideravelmente expandido no sistema PK, resultando em 611 alternativas de encadeamento entre 8 subsub-qualidades de tétrades selecionadas, subdivididas em maiores e menores<sup>1</sup>. A Figura 1 resume o material harmônico que é considerado no Sistema PK.

| Qualidades    | maiores |     |        |         | menores |                 |     |        |
|---------------|---------|-----|--------|---------|---------|-----------------|-----|--------|
| Subqualidades | 7M      | 7   | 7(b5)  | 7(#5)   | m7      | Ø               | °7  | m(7M)  |
| Símbolos      | Z       | Y   | X      | W       | z       | y               | x   | w      |
| Ex.           | C7M     | F#7 | E7(b5) | Db7(#5) | Am7     | G# <sup>Ø</sup> | B°7 | Fm(7M) |

**Figura 1:** As 8 sub-qualidades de tétrades do Sistema PK (In: ALMADA, 2017a, p. 24).

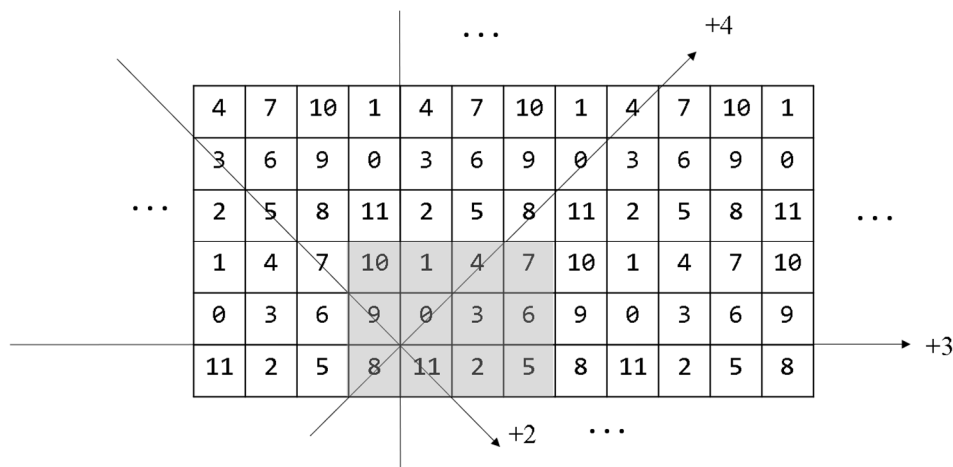
## 3. Representação geométrica de relações harmônicas

O conceito de *Tonnetz* (significando em alemão, literalmente, “rede de tons”) foi inicialmente proposto pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), sendo adotado e expandido por Arthur Oettingen (1836-1920) e, especialmente, por Hugo Riemann (1849-1919) em seus respectivos tratados sobre relações harmônico-tonais. Tais formulações seriam retomadas ao final do séc. XX por David Lewin, seguido por diversos outros autores (como Bryan Hyer, Richard Cohn, Robert Peck, David Kopp, entre outros), propondo abordagens que contribuíram para a formação dos corpos teóricos das teorias neorriemanniana e transformacional. Diferentes representações geométricas de configurações acordais, bem como de deslocamentos de notas em conduções de vozes (não necessariamente envolvendo princípios

<sup>1</sup> O crescimento exponencial de operações levaria inicialmente à constatação da inviabilidade do sistema, tendo em vista a necessidade de sua precisa identificação e notação. No entanto, o desenvolvimento de uma organização em classes de operações e operações específicas não apenas permite manter o arcabouço básico terminológico e conceitual idealizado por Kopp quanto a eficiência do próprio processo analítico, realizado por meios algorítmicos. Para maiores detalhes sobre tais procedimentos, ver ALMADA (2017a).

neorriemannianos ou operações) foram também recentemente propostas por Douthet & Steinbach (1998), Fred Lerdahl (2001), Joti Rockwell (2009), Dmitri Tymoczko (2011) e Richard Cohn (2012).

O Sistema PK também contempla as projeções espaciais das tétrades e seus encadeamentos. Isso se dá sobre uma *Tonnetz* especialmente desenvolvida (denominada T-4), apresentada na Figura 2.



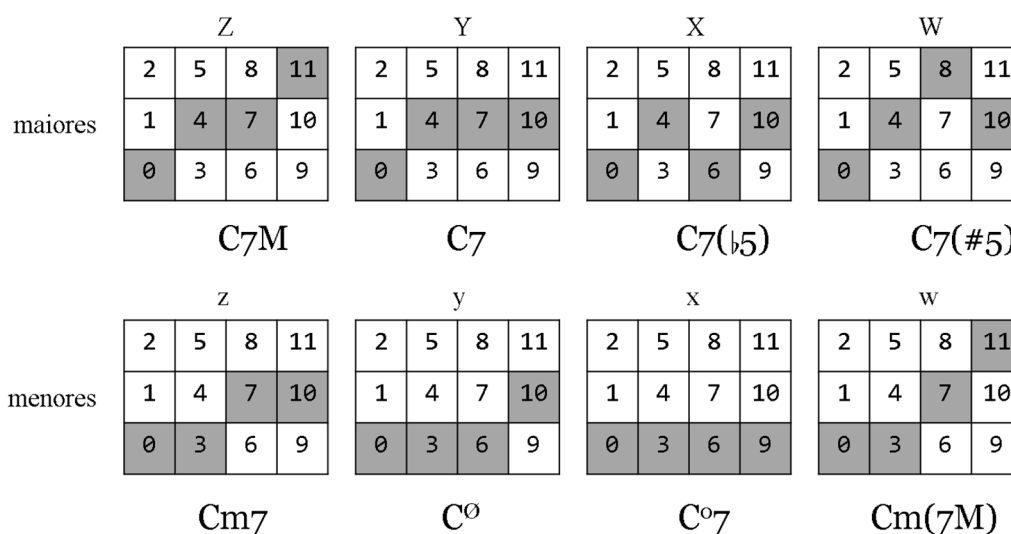
**Figura 2:** Modelo da *Tonnetz* para tétrades (T-4), considerando uma visão parcial de seu plano cartesiano. Quadrados representam classes de alturas dispostas de acordo com os eixos x (3 semitons ascendentes, em módulo 12) e y (1 semitom ascendentes, em módulo 12). As diagonais nordeste e sudoeste ligam alturas distanciadas por, respectivamente, 5 semitons ascendentes e 2 semitons ascendentes (ambos os casos em módulo 12). A área sombreada corresponde ao espaço cromático das 12 classes de alturas (infinitamente replicado sobre o plano da T-4) (In: ALMADA, 2017b, p. 3).

Considerando as 8 sub-qualidades convencionadas no Sistema PK, suas projeções geométricas na T-4 resultam em configurações padronizadas, denominadas *tetraminos* (ALMADA, 2017b, p. 3-7), ou seja figuras formadas pela junção de quatro quadrados/pc's, de tal maneira que um vértice ou lado de um quadrado seja sempre compartilhado por outro. Cada tetramino possui uma forma prima (ou seja, correspondente ao estado fundamental da respectiva tétrade, construído a partir da nota referencial Dó – classe de altura “0”) e quatro formas normais (as inversões possíveis dos acordes)<sup>2</sup>. A Figura 3 apresenta as formas primas das 8 tétrades do Sistema PK.

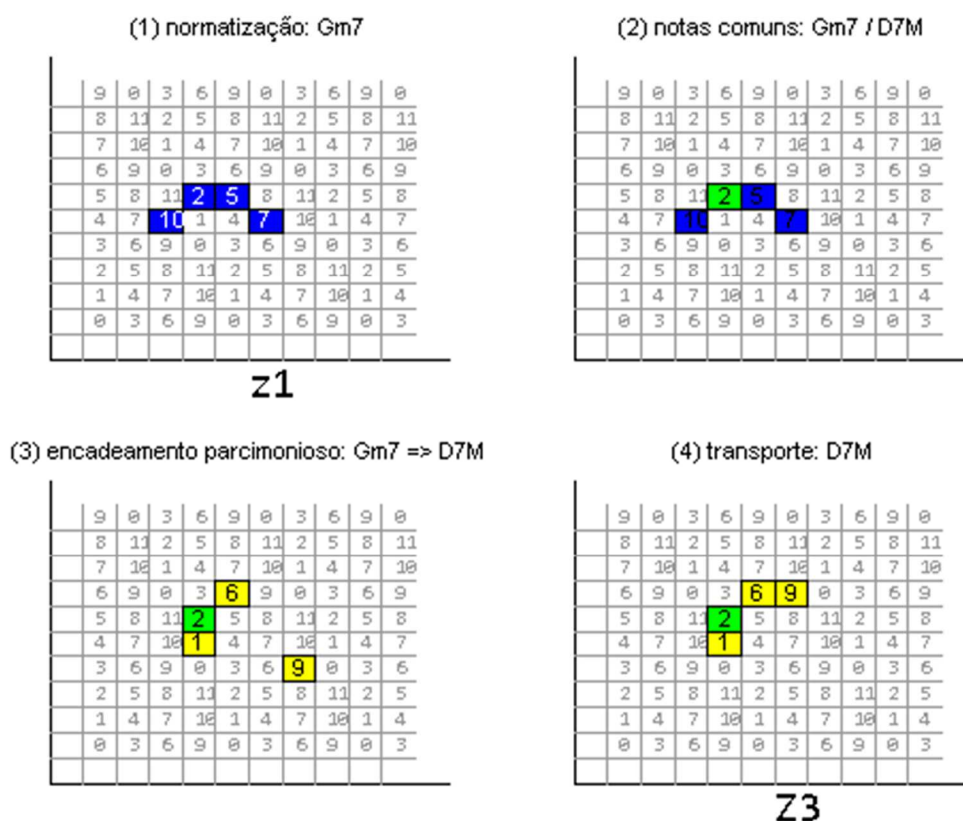
A transformação de uma tétrade A em uma tétrade B é plotada na T-4 em quatro estágios (Figura 4): (1) disposição da forma normal de A; (2) mapeamento das notas comuns/exclusivas entre A e B e subsequente indicação das movimentações

<sup>2</sup> Considerando as simetrias internas das tétrades diminuta e “sexta-francesa”, existem 27 formas normais possíveis.

parcimoniosas necessárias entre vozes; (3) encadeamento propriamente dito; (4) recomposição do resultado, com a apresentação da forma normal de B.



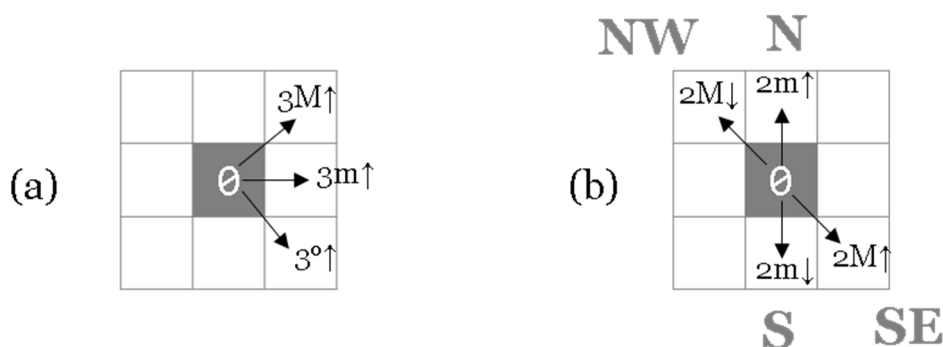
**Figura 3:** As 8 sub-qualidades tetrádicas adotadas no Sistema PK em suas formas primas (In: ALMADA, 2017a, p.26).



**Figura 4:** Apresentação dos quatro estágios de plotagem da transformação de Gm7 em D7M: (1) disposição de Gm7 (qualidade z1, primeira inversão); (2) indicação de nota comum (em verde) – pc 2 (Ré); (3) movimentação parcimoniosa das notas distintas para a formação de D7M (amarelo); (4) transporte das alturas para a forma normal Z3 (terceira inversão), de D7M (gráficos plotado pelo programa PK).

Reconhecidamente, uma das principais limitações do Sistema PK é o fato de que seu raio de ação está circunscrito a um universo de apenas 8 acordes, com cardinalidade fixa em 4 elementos. Embora isso se justifique por questões puramente operacionais, que permitem, em última instância, viabilizar o mapeamento de operações transformacionais de tais acordes, a redução do âmbito de possibilidades é por certo insatisfatória, pois deixa de fora do processo analítico sutilezas harmônicas, como tensões, substituições de notas estruturais (quartas e sextas, respectivamente, a terças e sétimas), bem como o encadeamento entre tríades e tétrades<sup>3</sup>.

Tal situação delimitadora motivou a expansão da teoria das representações espaciais no sistema, de tal modo que todas as possibilidades de configuração de acordes em música popular pudessem ser plenamente contempladas, independentemente de suas cardinalidades originais. Tal expansão promoveu a criação de novos conceitos e diagramas gráficos (a serem introduzidos oportunamente neste artigo), bem como a formalização de outros aspectos já existentes. Um deles é a categorização dos movimentos contíguos na T-4 em duas classes: *acordais* e *parcimoniosos*. Enquanto a primeira classe é empregada para a construção espacial dos acordes no sistema (englobando apenas intervalos ascendentes de terça, maior, menor ou diminuta<sup>4</sup>), a classe dos movimentos parcimoniosos abrange exclusivamente as conduções das vozes acordais, ou seja os intervalos de segunda (menor e maior), ascendentes ou descendentes. Com o intuito de facilitar sua quantificação nas projeções geométricas que serão a seguir apresentadas, tais movimentos passam a ser também associados a rumos geográficos: norte (N), sul (S), noroeste (NW) e sudeste (SE). A Figura 5 apresenta as duas classes de movimentos, de acordo com as respectivas direções projetadas na T-4.



**Figura 5:** Classes de movimentos possíveis na T-4: (a) acordais; (b) parcimoniosos.

<sup>3</sup> Tal problema foi parcialmente resolvido com a recente criação do sub-sistema “PK+”, na qual são acrescentadas as duas tríades perfeitas ao universo das 8 tétrades. O sub-sistema está sendo aplicado no exame da estrutura harmônica obra dos Beatles (KÜHN et al, 2017b).

<sup>4</sup> Necessário para a construção de tétrades dominantes com quintas alteradas.

A nova proposta também suprime da apresentação espacial dos encadeamentos os estágios da identificação das notas comuns/exclusivas e de recomposição em forma normal do acorde transformado (ver p.4), de modo a evidenciar claramente o processo contínuo das conduções parcimoniosas de uma dada sequência harmônica.

Uma progressão harmônica extraída da canção *Luiza*, de Tom Jobim (Exemplo 1) será usada para demonstrar a aplicação da nova versão do sistema de representações parcimoniosas<sup>5</sup>. A progressão é formada por 6 acordes: (1) Cm(7M)9 → (2) Cm7 → (3) F7(13) → (4) Fm → (5) G7(♭9) → (6) Cm7(9).

The image shows a musical score for the song "Luiza" by Tom Jobim. It consists of two staves: a vocal line and a piano accompaniment. The vocal line is in the treble clef and has lyrics underneath. The piano accompaniment is in the grand staff (treble and bass clefs). Above the vocal line, six chords are labeled: Cm(7M)9, Cm7, F7(13), Fm, G7(♭9), and Cm7(9). The piano accompaniment features a melodic line in the right hand and a harmonic line in the left hand, with a dynamic marking of *mp* (mezzo-piano). The lyrics are: "Rua, es - pa - da nua Bói - a no céu i - men - sa\_e a - ma - re - la Tão re - don - da\_a lua Co - mo flu -".

**Exemplo 1:** Tom Jobim - *Luiza* (c.4-8) (In: JOBIM, 2005).

A Figura 6a apresenta a disposição do primeiro acorde da sequência (Cm(7M)9) em um segmento da T-4. O acorde a ser encadeado em seguida, Cm7, é informado, o que provoca as duas movimentações indicadas pelas setas: uma segunda maior descendente a partir da nona (2) em direção à fundamental do acorde seguinte (o) e a descida cromática que conecta ambas as sétimas (11-10). Observe-se que a forma prima do acorde 1 (Figura 6b) é idêntica à sua configuração na T-4 (devido ao contínuo movimento das vozes individuais, isso não ocorrerá nos demais acordes).

A transformação de uma pêntade (tétrade + tensão harmônica) em uma tétrade resulta obrigatoriamente em dobramento de uma das notas do segundo acorde (no caso, a fundamental “o”), que é indicado pelo quadrado preto, como mostra a Figura 7a. O processo segue de maneira similar ao anterior, com a transformação de Cm7 em F713, nova pêntade (Figura 8).

<sup>5</sup> Considera-se aqui o conceito abstrato de *condução de vozes idealizada* (*idealized voice-leading*) proposto por Cohn (2012, p.6). Nesse tipo de encadeamento as vozes de um acorde devem mover-se da maneira mais econômica possível, não necessariamente correspondendo à realização musical concreta (no caso presente, ao que foi estipulado para o arranjo do piano).

### 1. Cm(7M)9 [→ 2. Cm7]

(a)

|   |    |    |    |   |    |    |    |   |    |    |
|---|----|----|----|---|----|----|----|---|----|----|
| 8 | 11 | 2  | 5  | 8 | 11 | 2  | 5  | 8 | 11 | 2  |
| 7 | 10 | 1  | 4  | 7 | 10 | 1  | 4  | 7 | 10 | 1  |
| 6 | 9  | 0  | 3  | 6 | 9  | 0  | 3  | 6 | 9  | 0  |
| 5 | 8  | 11 | 2  | 5 | 8  | 11 | 2  | 5 | 8  | 11 |
| 4 | 7  | 10 | 1  | 4 | 7  | 10 | 1  | 4 | 7  | 10 |
| 3 | 6  | 9  | 0  | 3 | 6  | 9  | 0  | 3 | 6  | 9  |
| 2 | 5  | 8  | 11 | 2 | 5  | 8  | 11 | 2 | 5  | 8  |
| 1 | 4  | 7  | 10 | 1 | 4  | 7  | 10 | 1 | 4  | 7  |
| 0 | 3  | 6  | 9  | 0 | 3  | 6  | 9  | 0 | 3  | 6  |

#### Forma prima de Cm(7M)9

(b)

|   |   |   |    |   |
|---|---|---|----|---|
|   |   |   | 11 | 2 |
|   |   | 7 |    |   |
| 0 | 3 |   |    |   |

**Figura 6:** (a) Disposição na T-4 do acorde 1, Cm(7M)9; (b) Forma prima do mesmo acorde. Setas indicam movimentos parcimoniosos intencionados.

### 2. Cm7 [→ 3. F713]

(a)

|   |    |    |    |   |    |    |    |   |    |    |
|---|----|----|----|---|----|----|----|---|----|----|
| 8 | 11 | 2  | 5  | 8 | 11 | 2  | 5  | 8 | 11 | 2  |
| 7 | 10 | 1  | 4  | 7 | 10 | 1  | 4  | 7 | 10 | 1  |
| 6 | 9  | 0  | 3  | 6 | 9  | 0  | 3  | 6 | 9  | 0  |
| 5 | 8  | 11 | 2  | 5 | 8  | 11 | 2  | 5 | 8  | 11 |
| 4 | 7  | 10 | 1  | 4 | 7  | 10 | 1  | 4 | 7  | 10 |
| 3 | 6  | 9  | 0  | 3 | 6  | 9  | 0  | 3 | 6  | 9  |
| 2 | 5  | 8  | 11 | 2 | 5  | 8  | 11 | 2 | 5  | 8  |
| 1 | 4  | 7  | 10 | 1 | 4  | 7  | 10 | 1 | 4  | 7  |
| 0 | 3  | 6  | 9  | 0 | 3  | 6  | 9  | 0 | 3  | 6  |

#### Forma prima de Cm7

(b)

|   |   |   |    |
|---|---|---|----|
|   |   | 7 | 10 |
| 0 | 3 |   |    |

**Figura 7:** (a) Disposição na T-4 do acorde 2, Cm7; (b) Forma prima do acorde 2.

### 3. F713 [→ 4. Fm]

(a)

|   |    |    |    |   |    |    |    |   |    |    |
|---|----|----|----|---|----|----|----|---|----|----|
| 8 | 11 | 2  | 5  | 8 | 11 | 2  | 5  | 8 | 11 | 2  |
| 7 | 10 | 1  | 4  | 7 | 10 | 1  | 4  | 7 | 10 | 1  |
| 6 | 9  | 0  | 3  | 6 | 9  | 0  | 3  | 6 | 9  | 0  |
| 5 | 8  | 11 | 2  | 5 | 8  | 11 | 2  | 5 | 8  | 11 |
| 4 | 7  | 10 | 1  | 4 | 7  | 10 | 1  | 4 | 7  | 10 |
| 3 | 6  | 9  | 0  | 3 | 6  | 9  | 0  | 3 | 6  | 9  |
| 2 | 5  | 8  | 11 | 2 | 5  | 8  | 11 | 2 | 5  | 8  |
| 1 | 4  | 7  | 10 | 1 | 4  | 7  | 10 | 1 | 4  | 7  |
| 0 | 3  | 6  | 9  | 0 | 3  | 6  | 9  | 0 | 3  | 6  |

#### Forma prima de F713

(b)

|   |   |   |    |
|---|---|---|----|
|   | 4 | 7 | 10 |
| 0 |   |   | 9  |

**Figura 8:** (a) Disposição na T-4 do acorde 3, F713; (b) Forma prima do acorde 3.

O encadeamento entre F713 e Fm resulta em uma queda mais expressiva de cardinalidade, de cinco para três (Figura 9). Conseqüentemente, o acorde 4 (Fm) apresenta dois dobramentos (0 e 5). A flutuação de cardinalidade 5-3 é então revertida com a transformação no próximo acorde.

### 4. Fm [→ 5. G7(b9)]

(a)

|   |    |    |    |   |    |    |    |   |    |    |
|---|----|----|----|---|----|----|----|---|----|----|
| 8 | 11 | 2  | 5  | 8 | 11 | 2  | 5  | 8 | 11 | 2  |
| 7 | 10 | 1  | 4  | 7 | 10 | 1  | 4  | 7 | 10 | 1  |
| 6 | 9  | 0  | 3  | 6 | 9  | 0  | 3  | 6 | 9  | 0  |
| 5 | 8  | 11 | 2  | 5 | 8  | 11 | 2  | 5 | 8  | 11 |
| 4 | 7  | 10 | 1  | 4 | 7  | 10 | 1  | 4 | 7  | 10 |
| 3 | 6  | 9  | 0  | 3 | 6  | 9  | 0  | 3 | 6  | 9  |
| 2 | 5  | 8  | 11 | 2 | 5  | 8  | 11 | 2 | 5  | 8  |
| 1 | 4  | 7  | 10 | 1 | 4  | 7  | 10 | 1 | 4  | 7  |
| 0 | 3  | 6  | 9  | 0 | 3  | 6  | 9  | 0 | 3  | 6  |

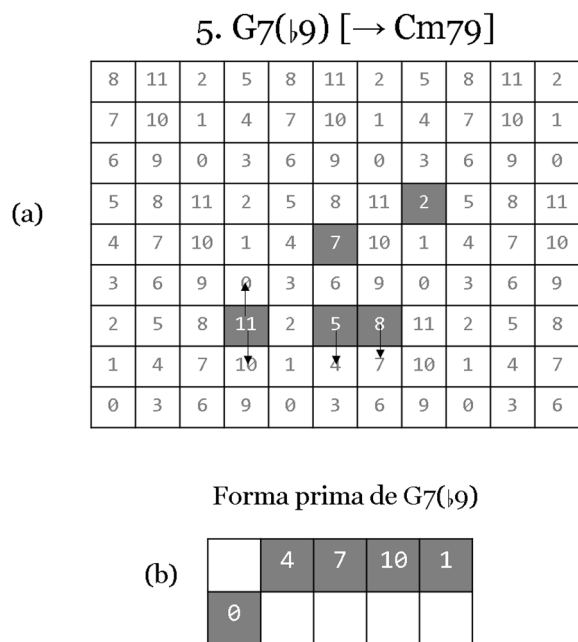
#### Forma prima de Fm

(b)

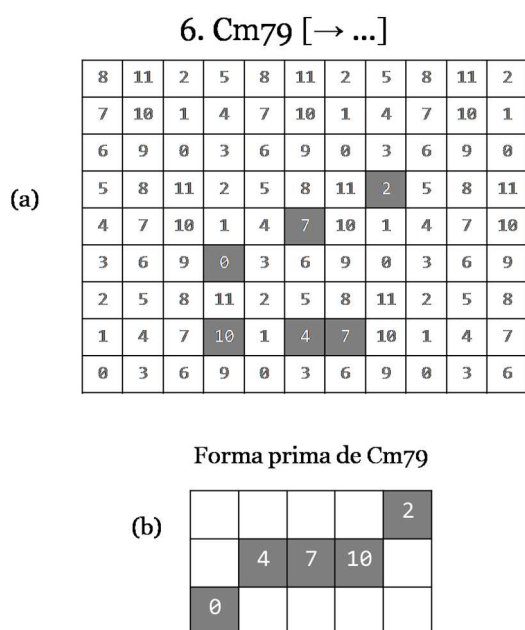
|   |   |   |
|---|---|---|
|   |   | 7 |
| 0 | 3 |   |

**Figura 9:** (a) Disposição na T-4 do acorde 4, Fm; (b) Forma prima do acorde 4.

O encadeamento seguinte, mostrado na Figura 10 ( $G7(\flat 9)$ -Cm79), embora envolva acordes de cardinalidade 5, faz surgir uma nova situação: a sétima do acorde 5 (pc 11) bifurca em duas direções parcimoniosas distintas, resultando na dupla fundamental (0) e sétima (10) do acorde 6. Conseqüentemente, Cm79 é constituído por 6 notas, já que uma das funções da pêntade (7) é dobrada durante o processo, como mostra a Figura 11.



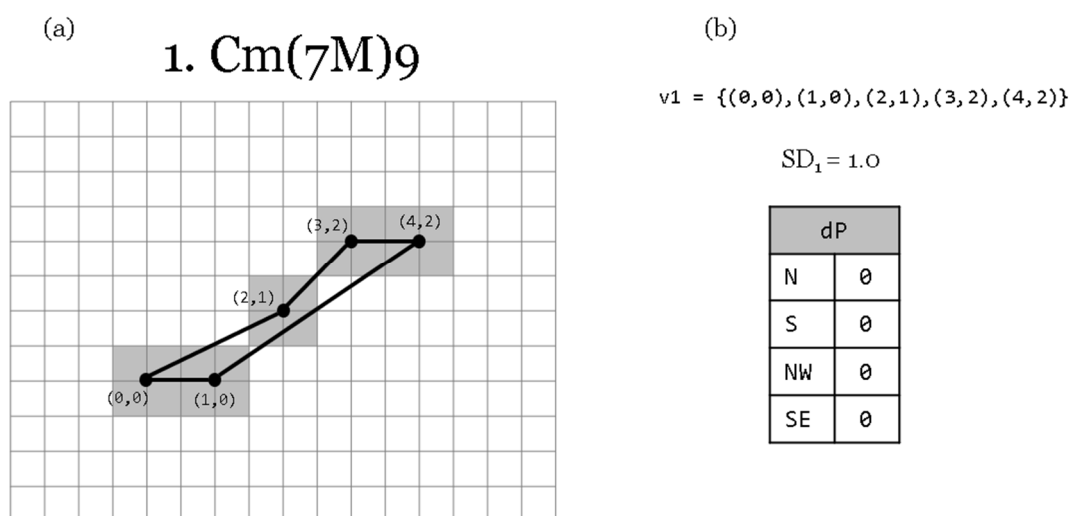
**Figura 10:** (a) Disposição na T-4 do acorde 5,  $G7(\flat 9)$ ; (b) Forma prima do acorde 5.



**Figura 11:** (a) Disposição na T-4 do acorde 6, Cm79; (b) Forma prima do acorde 6.



A série de representações geométricas dos encadeamentos dos 6 acordes, por sua vez, constitui a base para a expansão teórico-metológica que é o cerne deste estudo. Nesse sentido, três novos conceitos foram desenvolvidos, em associação à ideia de direção parcimoniosa (dp), já definida: *mapa de parcimônias*, *vértices de alturas* e *superfícies dinâmicas*. O mapa de parcimônias consiste na disposição planar dos pontos alcançados pelos encadeamentos parcimoniosos. Tais pontos são denominados vértices de alturas (v), que são definidos por suas coordenadas espaciais. As ligações entre os vértices definem polígonos, denominados superfícies dinâmicas (SD). Esse tipo de representação geométrica de segunda ordem (considerando aquele empregado nas Figuras 6-11 como de primeira ordem) permite dois tipos de quantificação dos dados analíticos: (1) registro cumulativo das direções parcimoniosas aplicadas no processo, formando ao final um perfil de parcimônias (pp) e (2) cálculo das áreas das superfícies dinâmicas a cada transformação, o que pode ser também registrado cumulativamente, resultando em um perfil de áreas (pa).

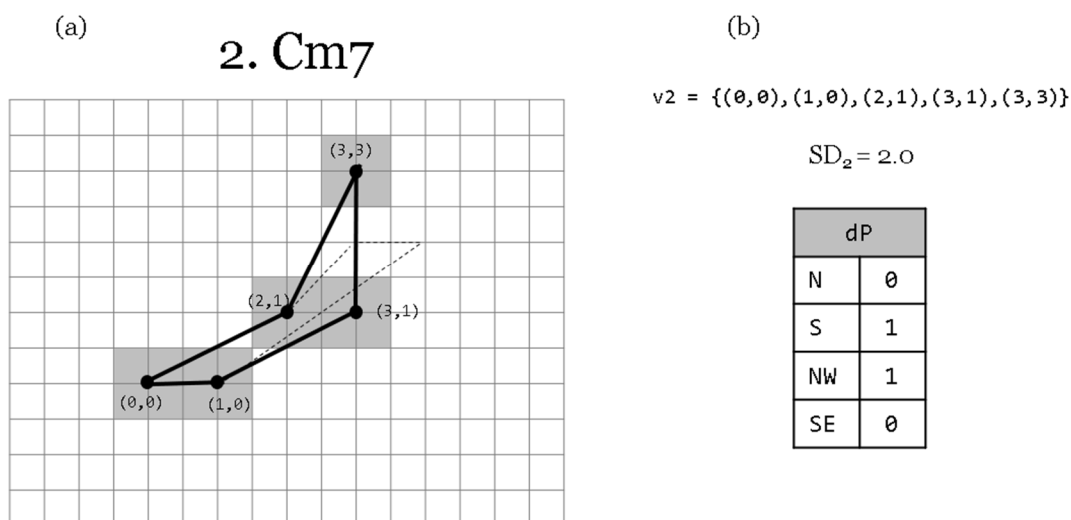


**Figura 12:** (a) Plotagem do acorde 1 no mapa de parcimônias com superfície dinâmica correspondente delimitada pelas linhas ligando os vértices; (b) dados numéricos: coordenadas dos vértices de alturas; valor da área da superfície dinâmica correspondente e quadro de direções parcimoniosas.

O funcionamento desse processo pode ser demonstrado através da mesma sequência de 6 acordes de *Luiza*. A Figura 12 apresenta o estado inicial do mapa, dispondo o acorde 1, identificado espacialmente pelos quadrados acinzentados, desta vez sem numerações internas, por questões de clareza (comparar com a Figura 6). A grade do plano foi subdividida de modo a evidenciar os centros geométricos de cada quadrado/pc, onde são posicionados os respectivos vértices de alturas, acompanhados

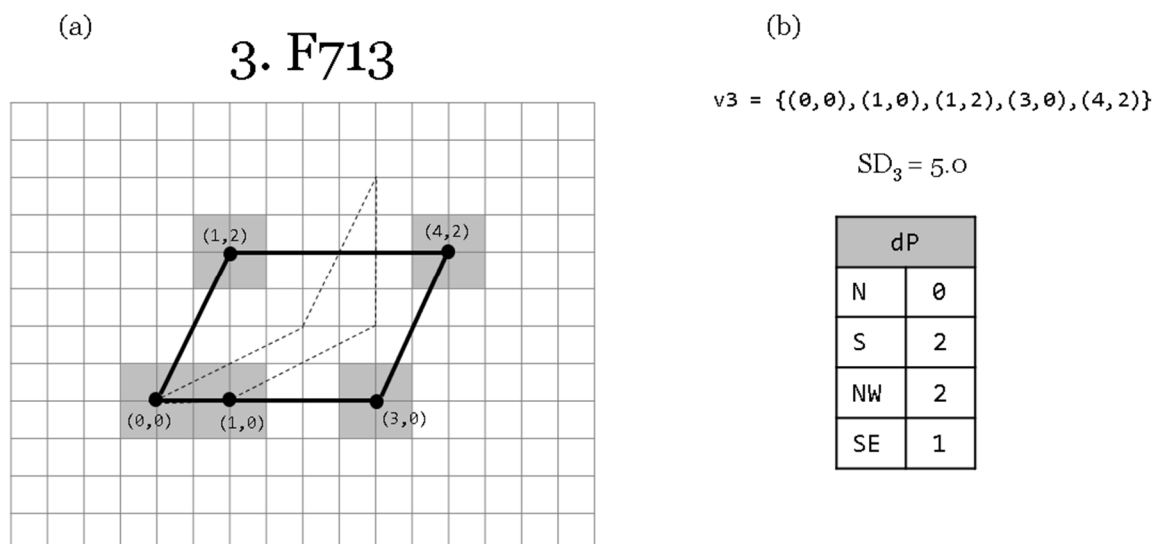
de suas coordenadas cartesianas (por convenção, adota-se para a fundamental do acorde inicial da sequência as coordenadas  $x=0/y=0$ )<sup>6</sup>. Sendo o estado inicial, o quadro de direções parcimoniosas é obviamente zerado. A superfície dinâmica calculada para o polígono 1 ( $SD_1$ ) é igual a uma unidade.

Os dois movimentos parcimoniosos nas direções S e NW implicam um aumento de 100% na área poligonal resultante (Figura 13).



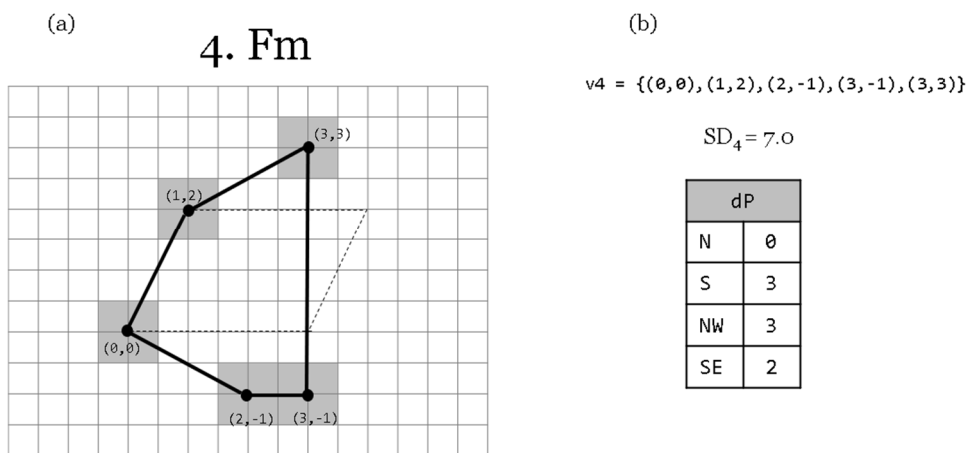
**Figura 13:** Plotagem do acorde 2 no mapa de parcimônias, com os respectivos dados computados (linhas pontilhadas indicam a superfície dinâmica referente ao acorde anterior).

O processo de expansão de superfície dinâmica se intensifica com as transformações 3 e 4 (Figuras 14 e 15).



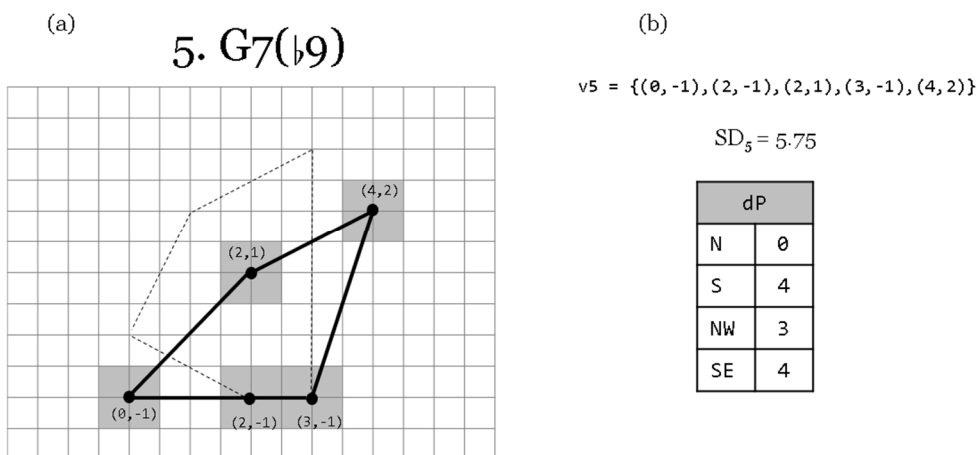
**Figura 14:** Plotagem do acorde 3 no mapa de parcimônias, com os respectivos dados computados.

<sup>6</sup> A plotagem dos polígonos (por definição, uma figura fechada formada pela conexão de pontos através de segmentos de reta) obedece à seguinte regra de construção: por cada vértice devem passar apenas dois lados, sem cruzamentos. Este critério elimina outras combinações possíveis de figuras, dando consistência ao processo analítico.

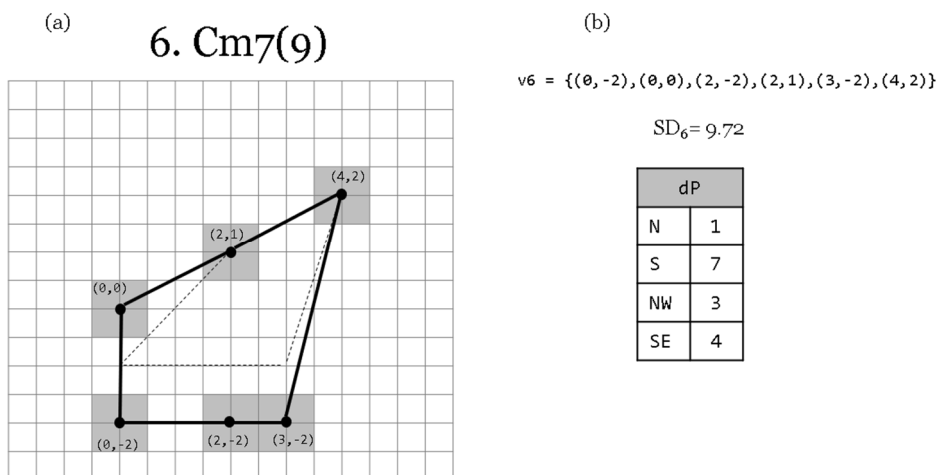


**Figura 15:** Plotagem do acorde 4 no mapa de parcimônias, com os respectivos dados computados.

A movimentação simultânea de três vértices na transformação 5 resulta pela primeira vez em uma contração da área poligona (Figura 16), que volta a se expandir no acorde seguinte (Figura 17).

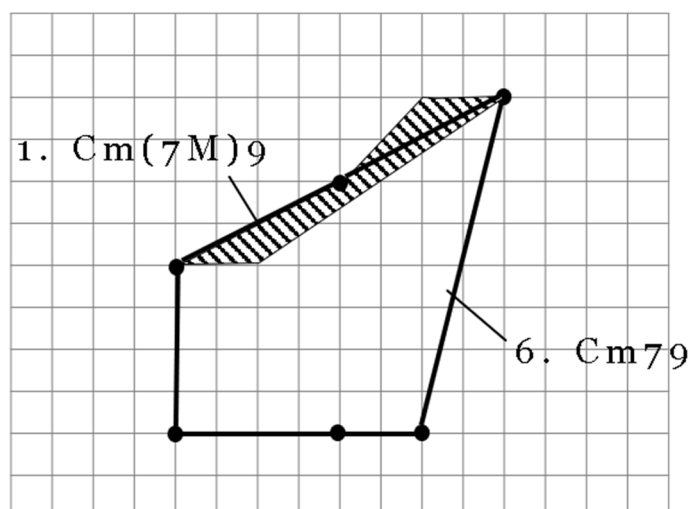


**Figura 16:** Plotagem do acorde 5 no mapa de parcimônias, com os respectivos dados computados.



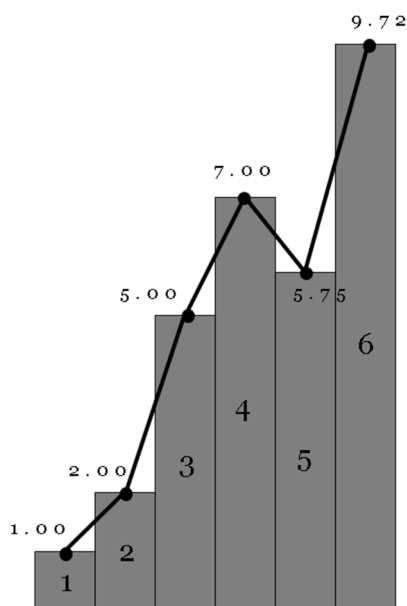
**Figura 17:** Plotagem do acorde 6 no mapa de parcimônias, com os respectivos dados computados.

A Figura 18 compara as superfícies dos estados inicial e final do processo.



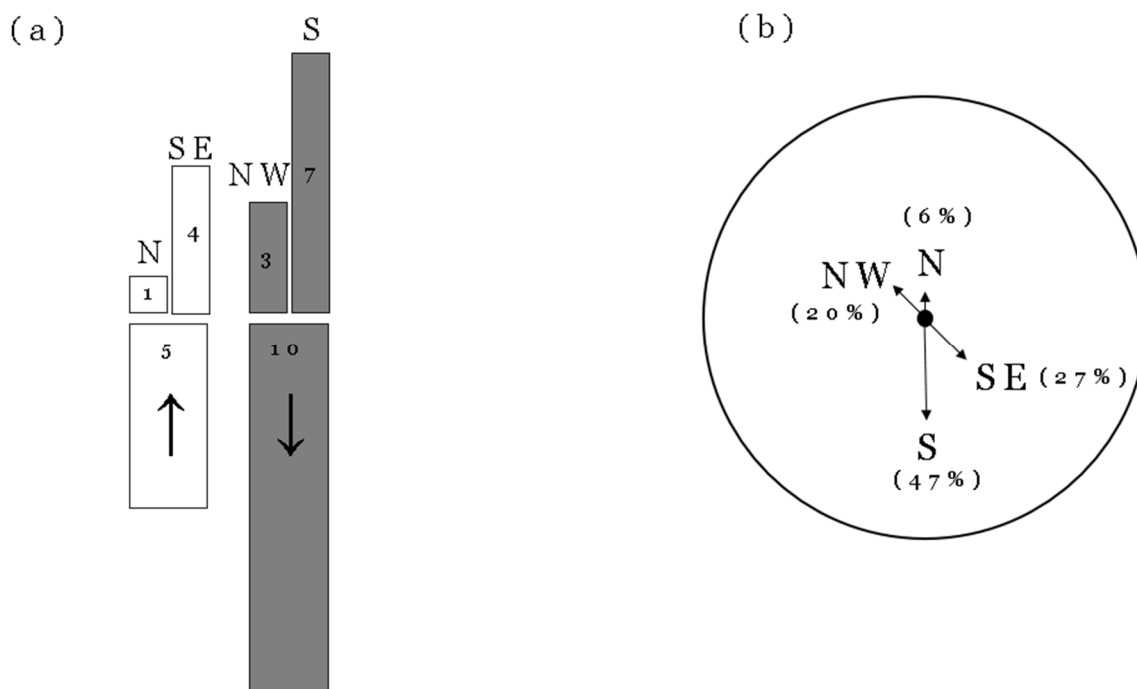
**Figura 18:** Comparação entre as superfícies dinâmicas dos acordes 6 e 1 (área hachurada).

A Figura 19 apresenta o perfil de áreas obtido na sequência harmônica do exemplo, evidenciando uma expansão quase que contínua das superfícies dos polígonos resultantes das conduções parcimoniosas.



**Figura 19:** Perfil de áreas do trecho harmônico analisado.

A especificação das tendências geográficas de parcimônia é contemplada na Figura 20, revelando uma trajetória que privilegia movimentações individuais descendentes, especialmente por segundas menores (S). Em relação aos ascendentes, observa-se uma discrepância entre os por semitom (N, apenas 6% do total) e os de segunda maior (SE, com 27% dos casos).



**Figura 20:** Perfil de direções parcimoniosas do trecho harmônico analisado: (a) organizado em relação às direções agrupadas em ascendentes (esquerda) e descendentes (direita); (b) em formato de rosa-dos-ventos, com os tamanhos das setas proporcionais ao comprimento do raio.

### Considerações Finais

Este artigo apresentou uma expansão teórica do Sistema PK, que propõe uma profunda revisão da representação geométrica de conduções parcimoniosas entre encadeamentos de acordes de alta cardinalidade em música popular. Ainda que, por motivos de delimitação de espaço e foco, apenas um pequeno trecho harmônico tenha sido empregado para aplicação da metodologia analítica derivada da proposta teórica, os resultados obtidos nos levam a considerá-la como altamente promissora e consistente. Como próximos dedobramentos, pretende-se estender a aplicação do método a uma peça completa e, em seguida, a um corpus mais amplo e consistente (como, por exemplo, uma das fases composicionais ou mesmo todo cancionário de Jobim), bem como iniciar estudos para uma implementação composicional. Os novos conceitos, recursos de representação gráfica e meios de quantificação permitem um exame sistemático, preciso e inédito das escolhas composicionais para a estruturação harmônica, podendo mesmo talvez contribuir para uma profunda compreensão dos processos de criação harmônica no universo da música popular.

## Referências

ALMADA, Carlos de L. Uma proposta teórica visando à aplicação de princípios neorriemmanianos em música popular. In: Congresso da Associação Nacional de Teoria e Análise Musical, 2, 2017. Florianópolis. **Anais ...** Florianópolis: UDESC, 2017a, p.20-30.

ALMADA, Carlos de L. Representação geométrica de conduções parcimoniosas de vozes em progressões harmônicas em música popular. In: XXVII ENCONTRO ANUAL DA ANPPOM, 2017. Campinas. **Anais ...** Campinas: UNICAMP, 2017b.

COHN, Richard. **Audacious euphony**: Chromaticism and the triad's second nature. Oxford: Oxford University Press, 2012.

DOUTHETT, Jack and STEINBACH, Peter. Parsimonious Graphs: A Study in Parsimony, Contextual Transformations, and Modes of Limited Transposition. **Journal of Music Theory**, v. 42, n. 2, 1998, p. 241-263.

JOBIM, Antônio Carlos. **Cancioneiro Jobim**: Obras escolhidas (5 vol.). Rio de Janeiro: Instituto Antônio Carlos Jobim, 2006. Partitura.

KOPP, David. **Chromatic Transformations in Nineteenth-Century Music**. New York: Cambridge University Press, 2002.

KÜHN, Max *et al.* Relações neorriemmanianas de acordes de sétima na primeira fase composicional de Antônio Carlos Jobim. In: Encontro Internacional de Teoria e Análise Musical, 4, 2017. São Paulo. **Anais ...** São Paulo: USP, 2017A, p.174-183.

KÜHN, Max *et al.* Sgt. Pepper: Uma abordagem neorriemmaniana. In: XXVII ENCONTRO ANUAL DA ANPPOM, 2017. Campinas. **Anais ...** Campinas: UNICAMP, 2017b.

LEWIN, David. Transformational Techniques in Atonal and Other Music Theories. **Perspectives of New Music**, v. 21, n.1,1982, p. 312-371.

ROCKWELL, Joti. Birdcage Flights: A Perspective on Inter-Cardinality Voice Leading. **Music Theory Online**, v.15.5, 2009.

TYMOCZKO, Dmitri. **A Geometry of Music: Harmony and Counterpoint in the Extended Common Practice**. Oxford: Oxford University Press, 2011.

## **Ecco! - uma linguagem computacional para descrição e estudo de temperamentos musicais**

*Lucas Bracher*  
*lucasbracher@gmail.com*

**Resumo:** A linguagem ecco! foi desenvolvida a partir da observação da dificuldade que músicos especializados em instrumentos históricos têm com o ferramental matemático necessário para descrever corretamente um temperamento musical. A partir da interação com a linguagem, um músico poderá descrever um temperamento usando apenas linguagem natural, sem a necessidade de usar operações de exponenciação e logaritmo, e poderá escutar o resultado do temperamento, bem como obterá a tabela de desvios em cents necessária para a programação de afinadores eletrônicos. O método utilizado foi o desenvolvimento da linguagem a partir da necessidade de facilitar o aprendizado dos aspectos matemáticos dos sistemas de temperamentos musicais e a observação direta dos estudantes destes sistemas ao utilizarem a mesma linguagem em comparação com os métodos existentes até hoje. A conclusão é que a linguagem ecco! facilitou o aprendizado e compreensão de aspectos dificilmente tangíveis de teoria de temperamentos, como as comas sintônicas e pitagórica, diferenciação de enarmônicos e iterações longas sobre o ciclo de quintas.

**Palavras-chave:** Temperamento Musical. Linguagem de programação. Interpretação historicamente orientada.

**Title of the Paper in English:** Ecco! - a Computational Language for Musical Temperaments Description and Study.

**Abstract:** ecco! language was developed from the observation of the difficulty that specialized musicians in historical instruments have with the necessary mathematical tools to correctly describe a musical temperament. From the interaction with language, a musician can describe a temperament using only natural language, without the need of use exponentiation and logarithm operations, and can hear the result of temperament, as well as obtain the table of deviations in cents necessary for the programming of electronic tuners. The method used was the development of language from the need to facilitate the learning of the mathematical aspects of musical temperament systems and the direct observation of the students of these systems when using the same language in comparison to the existing methods until today. The conclusion is that the language ecco! facilitated the learning and understanding of difficult tangible aspects of temperament theory, such as the syntonic and pythagorean commas, differentiation of enarmonics, and repeated long iterations over the cycle of fifths.

**Keywords:** Musical Temperament. Programming Languages. Historically Oriented Interpretation.

### **1. Introdução**

Os sistemas de temperamentos musicais são sistemas que ditam como as notas musicais devem ser afinadas tendo em vista o privilégio de determinados intervalos musicais em detrimento de outros e considerando também que a boa afinação de um determinado intervalo causa imediatamente uma pequena deterioração da qualidade de outros intervalos. Tais deteriorações são historicamente conhecidas pelos teóricos que criaram sistematizações de afinação de instrumentos. Um exemplo disso é o sistema de afinação pitagórico, que consiste em quintas afinadas

puras (relação de frequência 3:2). Tal método de afinação gera automaticamente duas distorções bastante perceptíveis: a primeira é que fica perfeitamente audível a diferença entre um intervalo de 4 quintas justas consecutivas e um intervalo de 2 oitavas mais uma terça maior pura. A segunda é que também se torna audível a diferença entre 12 quintas justas consecutivas e 7 oitavas. Em ambos os casos, os intervalos feitos apenas com quintas justas acabam sendo ligeiramente mais agudos que aqueles construídos apenas com oitavas ou com oitavas e terças maiores. À diferença entre o intervalo de quatro quintas justas consecutivas e o intervalo de duas oitavas mais uma terça pura dá-se o nome de coma sintônica, e ao intervalo de 12 quintas justas consecutivas e o intervalo de 7 oitavas dá-se o nome de coma pitagórica.

Durante um período considerável da história da música ocidental registrada, tais comas ou suas frações foram largamente usadas para os mais diversos sistemas de afinação aplicados em diversos instrumentos. A tais sistemas se dá o nome genérico de “temperamento”. O sistema temperado mais utilizado é o sistema mesotônico, que basicamente consiste em dividir uma determinada coma em várias frações iguais e distribuí-las através dos intervalos de quinta justa. O mais conhecido desses é o mesotônico regular que pega a coma sintônica e a distribui em quatro partes iguais através de quatro quintas justas consecutivas. Desta forma, o intervalo de terça maior surge como consonância, e por outro lado, surge também a quinta do lobo (HORA, 2007), intervalo este que é inutilizável utilizado apenas como intervalo de efeito em passagens musicais cuja intenção é expressar dor ou desconforto. Outro temperamento que surge e que hoje é praticamente hegemônico é o temperamento igual, que divide a coma pitagórica em 12 partes iguais e os distribui através das 12 quintas consecutivas, fazendo assim com que as quintas se estreitem e as terças maiores se alarguem. A partir das dificuldades que surgem em se explicar para um aluno todo este arcabouço teórico, acaba se tornando premente a necessidade de uma ferramenta para o auxílio do ensino de temperamentos musicais.

A ideia da linguagem ecco! surgiu a partir da observação de que o estudo de temperamentos musicais necessariamente precisaria ser feito a partir de um instrumento musical que permite a execução de diversas notas musicais ou a partir de um gerador de frequências, sendo que o operador de tal gerador de frequências precisaria ter conhecimento de aritmética modular e das operações de logaritmo e exponenciação para operá-lo devidamente. A linguagem ecco! extingue tais necessidades, permitindo que uma pessoa calcule e ouça tais notas apenas usando



linguagem natural, sem a utilização de outros instrumentos de apoio ou de operações matemáticas.

Assim surge a linguagem ecco! como ferramenta de apoio pedagógico a partir da observação direta em sala de aula. E tal ideia surgiu quando se observou que os alunos tinham dificuldade de entender como soaria um intervalo de coma sintônica, um intervalo de coma pitagórica, um intervalo entre três terças maiores puras e uma oitava ou um intervalo entre 53 quintas justas puras e 31 oitavas. A partir desta observação e a partir do fato de que temperamentos musicais podem ser mapeáveis em um sistema esparso de equações de primeiro grau, surgiu a ideia de criar uma linguagem computacional que utilizasse um subconjunto da linguagem natural que fosse mapeável nestas equações de primeiro grau, cujas variáveis armazenariam os valores das notas em hertz e em cents e que permitisse a alteração destas notas em fração de comas arbitrárias, cents e batimentos por segundo. Após alguns esboços surgiu o primeiro protótipo funcional, cuja tela pode ser vista abaixo e cujo vídeo, armazenado em canal anônimo, poderá ser visto na bibliografia (BRACHER, 2017<sup>a</sup>):

```
ecco!> B is 1 perfect fifth above E minus 1/4 of syntonic comma;
A: 440.000000 hertz, 0.000000 cents
B: 491.934955 hertz, 193.156857 cents
E: 657.953464 hertz, 696.578428 cents
ecco!> F# is 1 perfect fifth above B minus 1/4 of syntonic comma;
A: 440.000000 hertz, 0.000000 cents
B: 491.934955 hertz, 193.156857 cents
E: 657.953464 hertz, 696.578428 cents
F#: 735.614335 hertz, 889.735285 cents
ecco!> C# is 1 perfect fifth above F# minus 1/4 of syntonic comma;
A: 440.000000 hertz, 0.000000 cents
B: 491.934955 hertz, 193.156857 cents
C#: 550.000000 hertz, 386.313714 cents
E: 657.953464 hertz, 696.578428 cents
F#: 735.614335 hertz, 889.735285 cents
ecco!> play;
ecco!> play A C#;
ecco!> transpose 100 cents down;
A: 415.304698 hertz, 0.000000 cents
B: 464.324768 hertz, 193.156857 cents
C#: 519.130872 hertz, 386.313714 cents
E: 621.025373 hertz, 696.578428 cents
F#: 694.327475 hertz, 889.735285 cents
ecco!> play A C#;
ecco!> drop;
ecco!> A is 440 hertz;
A: 440.000000 hertz, 0.000000 cents
ecco!> C# is 1 major third above A;
A: 440.000000 hertz, 0.000000 cents
C#: 550.000000 hertz, 386.313714 cents
ecco!> X is 4 perfect fifths above A;
A: 440.000000 hertz, 0.000000 cents
C#: 550.000000 hertz, 386.313714 cents
X: 556.875000 hertz, 407.820003 cents
ecco!> compare C# X;
21.5062895967
ecco!>
```

**Figura 1:** Exemplo de tela da linguagem ecco! mostrando as quatro primeiras notas de um sistema temperado em mesotônico de quarto de coma sintônica, com operações de execução de intervalo através de placa de som, transposição e exibição do valor da coma sintônica em cents através de operação direta.

```

ecco!> play A C#;
ecco!> drop;
ecco!> A is 440 hertz;
A: 440.000000 hertz, 0.000000 cents
ecco!> C# is 1 major third above A;
A: 440.000000 hertz, 0.000000 cents
C#: 550.000000 hertz, 386.313714 cents
ecco!> X is 4 perfect fifths above A;
A: 440.000000 hertz, 0.000000 cents
C#: 550.000000 hertz, 386.313714 cents
X: 556.875000 hertz, 407.820003 cents
ecco!> compare C# X;
21.5062895967
ecco!> play C# X;
ecco!> drop;
ecco!> Ab is 415 hertz;
Ab: 415.000000 hertz, 0.000000 cents
ecco!> C is 1 major third above Ab;
Ab: 415.000000 hertz, 0.000000 cents
C: 518.750000 hertz, 386.313714 cents
ecco!> E is 1 major third above C;
Ab: 415.000000 hertz, 0.000000 cents
C: 518.750000 hertz, 386.313714 cents
E: 648.437500 hertz, 772.627428 cents
ecco!> G# is 1 major third above E;
Ab: 415.000000 hertz, 0.000000 cents
C: 518.750000 hertz, 386.313714 cents
E: 648.437500 hertz, 772.627428 cents
G#: 810.546875 hertz, 1158.941142 cents
ecco!> play Ab G#;
ecco!> G# is base;
G#: 810.546875 hertz, 0.000000 cents
Ab: 830.000000 hertz, 41.058858 cents
C: 1037.500000 hertz, 427.372572 cents
E: 1296.875000 hertz, 813.686286 cents
ecco!> play G# Ab;
ecco!>

```

**Figura 2:** Exemplo de tela da linguagem ecco! mostrando a diferença entre três terços maiores consecutivas e uma oitava (a oitava é ligeiramente maior que 3 terços consecutivas)

## 2. Implementação

A linguagem ecco! foi implementada utilizando-se uma versão em Python dos geradores de lexer e parser Lex e Yacc (BRACHER, 2017b). O resultado foi uma linguagem que utiliza um parser LALR (BRACHER, 2017a) para processar cada declaração.

```

return t

t_HERTZ = r'\bhertz\b'
t_INTERVAL_NUMBER = r'\b(third|fourth|fifth|sixth|octave|unison)s?\b'
t_INTERVAL_QUALITY = r'(major|minor|perfect)'
t_ABOVEBELOW = r'\b(above|below)\b'
t_PLUSMINUS = r'\b(plus|minus)\b'
t_COMMA_TYPE = r'\b(syntonic|pythagorean)\b'
t_COMMA = r'\bcommas?\b'
t_BPS = r'\bbps\b'
t_CENT = r'\bcents?\b'
t_DROP = r'\bdrop\b'
t_COMPARE = r'\bcompare\b'
t_GENERATE = r'\bgenerate\b'
t_BASE = r'\bbase\b'
t_TRANSPOSE = r'\btranspose\b'
t_UPDOWN = r'\b(up|down)\b'
t_PLAY = r'\bplay\b'
t_TO = r'\bto\b'
t_RPAREN = r'\)'
t_LPAREN = r'\('
t_LOAD = r'\bload\b'
t_FILENAME = r'[0-9A-Za-z_]+\b.ecco'
t_PRINT = r'\bprint\b'
t_ON = r'\bon\b'
t_OFF = r'\boff\b'
t_END_STMT = r';'

def t_error(self, t):

```

**Figura 3:** Definições de algumas tokens utilizadas pela linguagem ecco!

```

def p_definition(self, p):
    """definition : NOTE IS INTEGER HERTZ END_STMT
    | NOTE IS FLOAT HERTZ END_STMT"""
    self.inserere(p[1], p[3])
    self.lista()

def p_definitions2(self, p):
    "definition : NOTE IS INTEGER INTERVAL_QUALITY INTERVAL_
NUMBER ABOVEBELOW NOTE END_STMT"
    self.inserere(p[1], self.d[p[7]][0] * (self.parse_interval
(p[4], p[5], p[6]) ** p[3]))
    self.lista()

def p_definitions3(self, p):
    "definition : NOTE IS INTEGER INTERVAL_QUALITY INTERVAL_
NUMBER ABOVEBELOW NOTE PLUSMINUS INTEGER BPS END_STMT"
    self.inserere(p[1], (self.d[p[7]][0] * (self.parse_interva
l(p[4], p[5], p[6]) ** p[3])) + self.parse_plusminus(p[8], p[9]))
    self.lista()

def p_definitions4(self, p):
    """definition : NOTE IS INTEGER INTERVAL_QUALITY INTERVA
L_NUMBER ABOVEBELOW NOTE PLUSMINUS FLOAT OF COMMA_TYPE COMMA END_STMT
    | NOTE IS INTEGER INTERVAL_QUALITY INTERVA
L_NUMBER ABOVEBELOW NOTE PLUSMINUS FRACTION OF COMMA_TYPE COMMA END_STMT
    """
    self.inserere(p[1], self.d[p[7]][0] * (self.parse_interval
(p[4], p[5], p[6]) ** p[3]) * (2 ** (self.parse_plusminus(p[8], p[9]) * s
elf.parse_comma(p[11])) / 1200))

```

**Figura 4:** Trecho do parser LALR (BRACHER, 2017a) que define cada nota através de frequência em hertz, através de intervalo puro, através de intervalo temperado por batidas por segundo e intervalo temperado por fração ou por coma inteira.

A gramática foi toda baseada em um subconjunto do idioma inglês suficientemente capaz de descrever um temperamento por mais complexo que este seja, uma vez que cada nota de um temperamento pode ser mapeada em uma equação de primeiro grau e cada temperamento em um sistema esparso de equações de primeiro grau. Cada nota pode ser definida diretamente pela frequência e por relação com outra nota através de cents, intervalo puro (quinta justa, quarta justa, terças maiores e menores) e intervalo puro temperado por fração de coma, cents ou batimentos por segundo. A partir dos dados inseridos em linguagem natural, o parser da linguagem retira de cada expressão a informação necessária para calcular a próxima nota a partir de uma nota anterior ou a partir da frequência em hertz. A partir da informação retirada de cada frase, o próprio sistema já exibe a frequência e os cents de cada nota calculada. Além disso, a linguagem também permite que se possa ouvir cada uma das notas calculadas em intervalos, acordes ou em separado. A linguagem também permite a definição de um temperamento através de comprimento de corda de monocórdio, sendo que este método tem fundamento histórico, e para nosso privilégio, algumas definições para monocórdio coletadas por Neidhardt (1724) e outros seus contemporâneos podem ser usadas diretamente na linguagem, sem auxílio de monocórdio ou outro instrumento.

8

|                             |       |    |
|-----------------------------|-------|----|
| c                           | 1000. | 00 |
| H                           | 1053. | 49 |
| H <sup>m</sup>              | 1067. | 87 |
| B                           | 1109. | 85 |
| B <sup>m</sup>              | 1125. | 00 |
| A                           | 1185. | 18 |
| A <sup>m</sup>              | 1201. | 35 |
| G <sup>s</sup>              | 1248. | 59 |
| G <sup>s</sup> <sup>m</sup> | 1265. | 62 |
| G                           | 1333. | 33 |
| G <sup>m</sup>              | 1351. | 52 |
| F <sup>s</sup>              | 1404. | 66 |
| F <sup>s</sup> <sup>m</sup> | 1423. | 82 |
| F                           | 1479. | 81 |
| F <sup>m</sup>              | 1500. | 00 |
| E                           | 1580. | 24 |
| E <sup>m</sup>              | 1601. | 80 |
| D <sup>s</sup>              | 1664. | 78 |
| D <sup>s</sup> <sup>m</sup> | 1687. | 50 |
| D                           | 1777. | 77 |
| D <sup>m</sup>              | 1802. | 03 |
| C <sup>s</sup>              | 1872. | 88 |
| C <sup>s</sup> <sup>m</sup> | 1898. | 43 |
| C                           | 2000. | 00 |

Drauf

**Figura 5:** temperamento registrado por Neidhardt em seu livro *Sectio Canonis Harmonici*, dedicado ao estudo de temperamentos para instrumento de teclado. Os números aqui se referem a um comprimento arbitrário marcado na escala do monocórdio.

### 3. Utilização Prática

A partir da liberação de um primeiro protótipo da linguagem para alguns estudantes de instrumento de teclado históricos, constatou-se que este se sentindo à vontade para reproduzir temperamentos históricos, alterar e criar seus próprios temperamentos. Algumas sugestões foram acolhidas, como por exemplo, a informação mais clara de erros, carregamento de temperamentos a partir de arquivos, utilização de formas de onda senoidal, triangular, quadrada e dente de serra, e a utilização de histórico de comandos para repetição de comandos já dados e alteração para aqueles que são parecidos.

A linguagem ecco! Será disponibilizada livremente sob a licença GPL2 e sua url de disponibilização será informada em breve.

**Referências:**

BRACHER, Lucas. **ecco! Uma Linguagem para Descrição de Temperamentos**. 2017a. Youtube. Disponível em: <<https://youtu.be/Qa-uRBhQ3f8>>. Acesso em: 30 out. 2017.

BRACHER, Lucas. **ecco! Uma Linguagem para Descrição de Temperamentos - aspectos computacionais**. 2017b. Youtube. Disponível em: <<https://youtu.be/vhuN4ugs1Es>>. Acesso em: 30 out. 2017.

NEIDHARDT, J. G. **Sectio canonis harmonici**. 1724. Disponível em <[http://imslp.org/wiki/Sectio\\_canonis\\_harmonici\\_\(Neidhardt%2C\\_Johann\\_Georg\)](http://imslp.org/wiki/Sectio_canonis_harmonici_(Neidhardt%2C_Johann_Georg))>. Acesso em: 30 out. 2017.

HORA, E. P. A Afinação Mesotônica do século XVII e sua aplicação prática. **ICTUS**, Salvador: UFBA, v. 8 n. 2, p. 49-64, 2007.

## Do uso de tetracordes na concepção de um jogo de análise e composição musical

*Marcelo Birck*

*Universidade Federal de Santa Maria – eletrolas@gmail.com*

*João Lazzarin*

*Universidade Federal de Santa Maria – lazzarin@smail.ufsm.br*

**Resumo:** O artigo trata de um jogo de análise e composição, cuja meta é descobrir séries de 29 notas nas quais não se repitam nenhum dos 29 tetracordes da classificação de Allen Forte. Surgido de forma inesperada a partir da investigação de limites matemáticos que acelerassem a identificação de séries de 29 tetracordes (cujos cálculos são lentos mesmo para computadores), o jogo tem mostrado potencial para estimular abordagens além de possíveis hábitos musicais. Podem participar pessoas em fases distintas de sua formação.

**Palavras-chave:** Teoria dos conjuntos. Composição. Jogo Musical. Análise Musical.

### **Tetrachords as a Game for Analysis and Musical Composition**

**Abstract:** This article presents a game for analysis and composition, whose purpose is to discover series with 29 notes without any repetitions of the 29 tetrachords proposed by Allen Forte. Emerged as an unexpected discovery, its conception took place during the search for mathematical limits that could accelerate the process of discovering the 29 tetrachords series (these calculations tended to be very slow, even with the help of a software). The game can be played by persons with distinct musical backgrounds.

**Keywords:** Set theory. Musical Composition. Music Game. Musical Analysis.

### **1. Apresentação**

Trataremos aqui da criação e dos pressupostos de um jogo baseado na teoria dos conjuntos proposta por Allen Forte (1977), cuja meta é descobrir sequências de 29 notas nas quais não ocorram repetições de tetracordes. A ideia surgiu durante a identificação de aspectos estruturais de séries de 12 sons formadas pelos 12 tricordes básicos (primeira etapa de nossa pesquisa), o que nos estimulou a investigar as propriedades de séries que contenham todos os 29 tetracordes da classificação de Forte. Porém, a tarefa revelou-se mais complexa: com os recursos de hardware disponíveis, os cálculos para identificação de tais séries consumiriam em torno de 30 anos. Na busca por limites matemáticos que reduzissem o tempo de processamento, o jogo surgiu quase como um efeito colateral, revelando-se uma ferramenta para o ensino e prática de análise e composição. Uma vez que podem participar pessoas em diferentes etapas de sua formação musical, iniciaremos apresentando alguns conceitos básicos conforme utilizados na concepção do jogo, partindo em seguida para a descrição do mesmo. Por questões práticas, utilizaremos o formato de representação dos conjuntos que se mostrou mais adequado ao longo de várias sessões de teste.

## 2. Preliminares

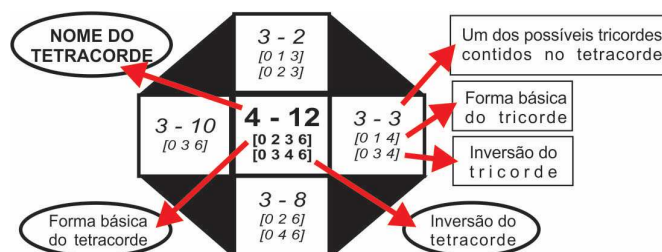
Na teoria dos conjuntos, qualquer grupo de notas pode ser expresso mediante um número finito de sequências numéricas, nas quais as diferenças entre os elementos representam intervalos. A sequência 0-3 representa uma terça menor, 0-1 uma segunda menor, 4-6 uma segunda maior, e assim por diante. Tais grupos são classificados de acordo com o número de elementos, indo de um mínimo de 3 a um máximo de 9 notas, sendo que cada categoria apresenta possibilidades específicas de combinações. Grupos de 3 notas (trícordes) permitem apenas 12 combinações básicas, enquanto grupos de 4 notas (tetracordes) apresentam 29 possibilidades (o jogo utiliza somente estas duas categorias). Ao contrário de uma série, que demanda uma organização fixa, um conjunto se define pelos seus elementos, independente da ordem, transposição ou inversão. Assim, [3 - 1 - 0], [1 - 0 - 3] e [0 - 3 - 1] são permutações da forma básica [0 - 1 - 3]. De maneira similar, [1 - 2 - 4] é a sua transposição, assim como [0 - 2 - 3] a retrogradação da inversão (que chamaremos apenas de inversão). E mediante a combinação de tais procedimentos, podemos identificar o trícorde [3 - 4 - 1] como inversão transposta e permutada de [0 - 1 - 3]. Para fins analíticos, podemos nos referir a todos eles como [0 - 1 - 3], ainda que no nosso caso seja preciso distinguir forma básica e inversão (conforme veremos). Também é interessante frisar que não é possível inverter os chamados grupos simétricos, cuja sequência dos intervalos não se altera quando lidos de trás para frente. [0 - 2 - 4], [0 - 1 - 4 - 5] e [0 - 2 - 3 - 5], por exemplo, são todos simétricos.

Concluimos estas considerações apresentando o conceito de subconjunto, que, como o nome sugere, é um grupo contido no interior de outro formado por mais elementos. Assim, os trícordes [0 - 1 - 3], [0 - 1 - 6], [0 - 3 - 6] e [1 - 3 - 6] são todos subconjuntos do tetracorde [0 - 1 - 3 - 6]. O número de subconjuntos que cada um dos 29 tetracordes pode conter varia de um a quatro trícordes, sendo este um critério básico para conexão entre os tetracordes no interior das séries.

## 3. O jogo

É formado por 29 peças correspondentes aos 29 tetracordes. Além disso, também são utilizadas uma tabela de trícordes (que indica de quais tetracordes são subconjuntos), e uma planilha eletrônica para cálculo automático de dados. Não há restrições quanto ao número de jogadores, e a experiência tem demonstrado que, mais do que competir, os participantes tendem a colaborar no objetivo do jogo.

Abaixo vemos uma das 29 peças. Ao centro, 4-12 é a denominação do grupo, com o 4 indicando o número de elementos, e 12 o número de ordem segundo a classificação dos tetracordes. Entre colchetes está a sequência numérica que representa os intervalos, seguida de sua inversão (se houver). O mesmo vale para os subconjuntos, identificados nas pontas da peça (Figura 1).



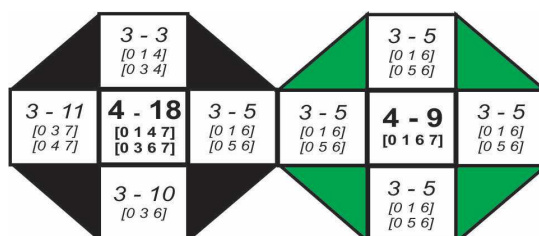
**Figura 1:** Uma das 29 peças do jogo.

De que maneira estabelecemos uma série de 29 tetracordes a partir de tais peças? Para responder à pergunta, selecionamos uma série iniciada por permutações das formas básicas de 4-18 e 4-9 (sem transposição nem inversão – Tabela 1).

**Tabela 1:** Uma das séries identificadas até o momento, com indicação dos tetracordes componentes.

| Série  | 4 0 1 7 6 11 10 0 1 7 8 5 11 2 7 10 3 0 1 11 6 10 9 7 5 0 2 6 8 4 0 1  |
|--------|--|
|        | 4-18 [0 1 4 7] 4-5 [0 1 2 6] 4-29 [0 1 3 7] 4-17 [0 3 4 7] 4-2 [0 1 2 4] 4-3 [0 1 3 4] 4-15 [0 1 4 6] 4-19 [0 1 4 8] |
| Grupos | 4-9 [0 1 6 7] 4-1 [0 1 2 3] 4-12 [0 2 3 6] 4-20 [0 1 5 8] 4-6 [0 1 2 7] 4-11 [0 1 3 5] 4-25 [0 2 6 8]                |
|        | 4-16 [0 1 5 7] 4-13 [0 1 3 6] 4-28 [0 3 6 9] 4-26 [0 3 5 8] 4-14 [0 2 3 7] 4-22 [0 2 4 7] 4-21 [0 2 4 6]             |
|        | 4-7 [0 1 4 5] 4-8 [0 1 5 6] 4-27 [0 2 5 8] 4-10 [0 2 3 5] 4-4 [0 1 2 5] 4-23 [0 2 5 7] 4-24 [0 2 4 8]                |

Conforme a Tabela 1 demonstra, qualquer grupo de cinco notas seguidas é formado por dois tetracordes que compartilham três elementos. Assim, [4 - 0 - 1 - 7] (4-18) finaliza com 3-5 (na inversão transposta e permutada), o mesmo tricorde que encontramos no início de [0 - 1 - 7 - 6] (4-9). Na Figura 2, vemos o encaixe das duas peças (desconsideremos por enquanto a diferença de coloração).



**Figura 2:** Encaixe de peças conforme a sequência inicial da série apresentada na Tabela 1.

O jogo inicia com a seleção de uma das peças, a partir da qual se define a ordem dos elementos do tetracorde. Por exemplo, consideremos [3 - 0 - 2 - 5], uma



permutação da forma básica de 4-10. A seguir, identificamos de quais tetracordes o tricorde final [0 - 2 - 5] (3-7) é um subconjunto (indicado não só nas peças, mas também na tabela que veremos em seguida). Caso se decida seguir para 4-4 (forma básica [0 - 1 - 2 - 5]), ao agregar o número faltante temos a permutação [0 - 2 - 5 - 1]. A Tabela 2 apresenta a sequência que resulta dos dois tetracordes combinados.

|                                    |          |          |          |          |          |
|------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 4 - 10                             | 3        | 0        | 2        | 5        |          |
| 4 - 4                              |          | 0        | 2        | 5        | 1        |
| <b><i>Sequência Resultante</i></b> | <b>3</b> | <b>0</b> | <b>2</b> | <b>5</b> | <b>1</b> |

**Tabela 2:** Uma das sequências possíveis a partir do encaixe das peças 4-10 e 4-4.

O mesmo princípio se aplica aos tetracordes seguintes. Para facilitar a identificação das notas que podem ser acrescentadas a uma sequência, elaborou-se uma tabela contendo as possíveis continuações a partir do tricorde final (Tabela 3). Vejamos um exemplo, tomando como base a sequência [2 - 0 - 1 - 3] (4-1). Identificado o final (no caso 3-2, [0 - 1 - 3]), consultamos na tabela o box específico a fim de saber para quais tetracordes podemos seguir. Na coluna central do box, temos a lista de tetracordes que contêm o tricorde. Na coluna da esquerda, os números que devem ser agregados à forma básica (em negrito e itálico, fora do parêntese). Assim, se decidirmos encaixar 4-11, acrescentamos um 5 ao tricorde final, tendo por resultado [0 - 1 - 3 - 5]. Caso o tricorde final seja uma inversão, utiliza-se a coluna da direita. Se escrevemos 4-1 como [1 - 0 - 2 - 3], acrescentamos 10 ao tricorde e obtemos [0 - 2 - 3 - 10] (o mesmo 4-11, agora como permutação transposta da inversão). Prosseguimos deste modo até que se esgotem todas as peças (o que nem sempre ocorre).

Como se pode notar, os boxes incluem apenas as formas básicas dos tricordes, bem como suas inversões. Porém, transposições e/ou permutações obviamente ocorrem, e já nas primeiras tentativas constatou-se que cálculos manuais para identificar os tricordes comprometiam a fluência do jogo. Para contornar tais fatos, concebeu-se a seguinte planilha eletrônica, a ser pilotada por um mediador (Figura 3).

Em suma, o mediador tem as seguintes funções:

a) anotar no campo em verde a sequência inicial (definida pelos participantes a partir da seleção de uma das 29 peças). Apenas este tetracorde será

totalmente preenchido. Para os demais, basta preencher uma única casa (diversos campos da planilha são preenchidos automaticamente, conforme veremos);

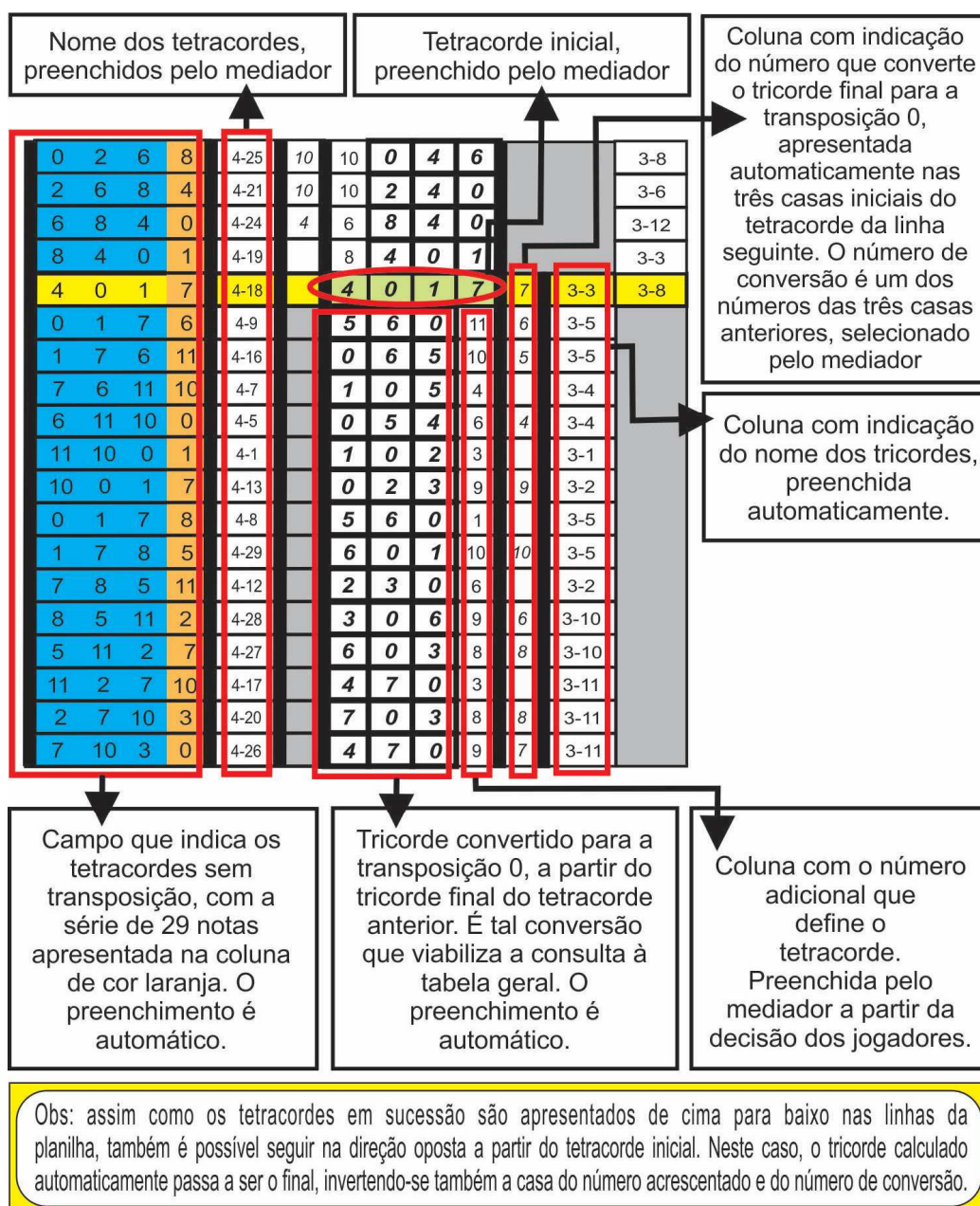
**Tabela 3:** Tabela de sucessão dos tetracordes a partir dos tricordes compartilhados.

Os doze tricordes e suas inversões

|              |                    |              |                    |              |                    |               |                    |               |                    |               |         |
|--------------|--------------------|--------------|--------------------|--------------|--------------------|---------------|--------------------|---------------|--------------------|---------------|---------|
| <b>3 - 1</b> | [0 1 2]            | <b>3 - 2</b> | [0 1 3]<br>[0 2 3] | <b>3 - 3</b> | [0 1 4]<br>[0 3 4] | <b>3 - 4</b>  | [0 1 5]<br>[0 4 5] | <b>3 - 5</b>  | [0 1 6]<br>[0 5 6] | <b>3 - 6</b>  | [0 2 4] |
| <b>3 - 7</b> | [0 2 5]<br>[0 3 5] | <b>3 - 8</b> | [0 2 6]<br>[0 4 6] | <b>3 - 9</b> | [0 2 7]            | <b>3 - 10</b> | [0 3 6]            | <b>3 - 11</b> | [0 3 7]<br>[0 4 7] | <b>3 - 12</b> | [0 4 8] |

Tabela de Sucessão dos Tetracordes a Partir dos Tricordes Compartilhados

| <b>3 - 1</b>   | <b>3 - 4</b>          | <b>3 - 7</b>          | <b>3 - 10</b>         |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
|--|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------|--------------|-------------|-------------|--------------|-------------|------------|--------------|------------|------------|---------------|------------|------------|---------------|------------|--|---------------|-----------------------|-----------------------|---------------|--------------|-------------|---------------|--------------|-----------|---------------|--------------|--|-----------|-----------------------|-----------------------|-------------|---------------|-------------|------------|---------------|------------|-----------|---------------|-------------|------------|---------------|------------|-----------|---------------|-------------|---|---------------|-----------------------|-----------------------|---------------|--------------|-------------|---------------|---------------|-------------|---------------|---------------|---|-------------|-----------------------|-----------------------|-------------|---------------|-------------|--|---------------|-----------------------|-------------|---------------|---------------|-------------|---------------|---------------|-------------|---------------|---------------|---|---------------|-----------------------|-------------|---------------|---------------|-------------|---------------|---------------|-------------|---------------|---------------|--|-----------|-----------------------|-----------------------|-------------|---------------|-------------|-------------|---------------|-------------|-------------|---------------|-------------|------------|---------------|-----------|-----------|---------------|------------|-------------|---------------|-------------|------------|---------------|-----------|-----------|---------------|------------|-------------|---------------|-------------|
| <table border="1"> <tr> <th>[0 1 2]</th> <th>Tetracorde Resultante</th> <th>[0 1 2]</th> </tr> <tr> <td>(0 1 2) 3</td> <td><b>4 - 1</b></td> <td>11 (0 1 2)</td> </tr> <tr> <td>(0 1 2) 4</td> <td><b>4 - 2</b></td> <td>10 (0 1 2)</td> </tr> <tr> <td>(0 1 2) 5</td> <td><b>4 - 4</b></td> <td>9 (0 1 2)</td> </tr> <tr> <td>(0 1 2) 6</td> <td><b>4 - 5</b></td> <td>8 (0 1 2)</td> </tr> <tr> <td>(0 1 2) 7</td> <td><b>4 - 6</b></td> <td>7 (0 1 2)</td> </tr> </table>   | [0 1 2]               | Tetracorde Resultante | [0 1 2]               | (0 1 2) 3   | <b>4 - 1</b> | 11 (0 1 2)  | (0 1 2) 4   | <b>4 - 2</b> | 10 (0 1 2)  | (0 1 2) 5  | <b>4 - 4</b> | 9 (0 1 2)  | (0 1 2) 6  | <b>4 - 5</b>  | 8 (0 1 2)  | (0 1 2) 7  | <b>4 - 6</b>  | 7 (0 1 2)  | <table border="1"> <tr> <th>[0 1 5]</th> <th>Tetracorde Resultante</th> <th>(Inversão)<br/>[0 4 5]</th> </tr> <tr> <td>(0 1) 2 (5)</td> <td><b>4 - 4</b></td> <td>(0) 3 (4 5)</td> </tr> <tr> <td>11 (0 1 5)</td> <td><b>4 - 5</b></td> <td>(0 4 5) 6</td> </tr> <tr> <td>(0 1) 4 (5)</td> <td><b>4 - 7</b></td> <td>(0) 1 (4 5)</td> </tr> <tr> <td>(0 1 5) 6</td> <td><b>4 - 8</b></td> <td>11 (0 4 5)</td> </tr> <tr> <td>(0 1) 3 (5)</td> <td><b>4 - 11</b></td> <td>(0 2) 4 (5)</td> </tr> <tr> <td>10 (0 1 5)</td> <td><b>4 - 14</b></td> <td>(0 4 5) 7</td> </tr> <tr> <td>(0 1 5) 7</td> <td><b>4 - 16</b></td> <td>10 (0 4 5)</td> </tr> <tr> <td>9 (0 1 5)</td> <td><b>4 - 19</b></td> <td>(0 4 5) 8</td> </tr> <tr> <td>(0 1 5) 8</td> <td><b>4 - 20</b></td> <td>9 (0 4 5)</td> </tr> </table> | [0 1 5]       | Tetracorde Resultante | (Inversão)<br>[0 4 5] | (0 1) 2 (5)   | <b>4 - 4</b> | (0) 3 (4 5) | 11 (0 1 5)    | <b>4 - 5</b> | (0 4 5) 6 | (0 1) 4 (5)   | <b>4 - 7</b> | (0) 1 (4 5)  | (0 1 5) 6 | <b>4 - 8</b>          | 11 (0 4 5)            | (0 1) 3 (5) | <b>4 - 11</b> | (0 2) 4 (5) | 10 (0 1 5) | <b>4 - 14</b> | (0 4 5) 7  | (0 1 5) 7 | <b>4 - 16</b> | 10 (0 4 5)  | 9 (0 1 5)  | <b>4 - 19</b> | (0 4 5) 8  | (0 1 5) 8 | <b>4 - 20</b> | 9 (0 4 5)   | <table border="1"> <tr> <th>[0 2 5]</th> <th>Tetracorde Resultante</th> <th>(Inversão)<br/>[0 3 5]</th> </tr> <tr> <td>(0) 1 (2 5)</td> <td><b>4 - 4</b></td> <td>(0 3) 4 (5)</td> </tr> <tr> <td>(0 2) 3 (5)</td> <td><b>4 - 10</b></td> <td>(0) 2 (3 5)</td> </tr> <tr> <td>(0 2) 4 (5)</td> <td><b>4 - 11</b></td> <td>(0) 1 (3 5)</td> </tr> <tr> <td>11 (0 2 5)</td> <td><b>4 - 13</b></td> <td>(0 3 5) 6</td> </tr> <tr> <td>(0 2 5) 6</td> <td><b>4 - 15</b></td> <td>11 (0 3 5)</td> </tr> <tr> <td>10 (0 2 5)</td> <td><b>4 - 22</b></td> <td>(0 3 5) 7</td> </tr> <tr> <td>(0 2 5) 7</td> <td><b>4 - 23</b></td> <td>10 (0 3 5)</td> </tr> <tr> <td>9 (0 2 5)</td> <td><b>4 - 26</b></td> <td>(0 3 5) 8</td> </tr> <tr> <td>(0 2 5) 8</td> <td><b>4 - 29</b></td> <td>9 (0 2 3)</td> </tr> </table> | [0 2 5]       | Tetracorde Resultante | (Inversão)<br>[0 3 5] | (0) 1 (2 5)   | <b>4 - 4</b> | (0 3) 4 (5) | (0 2) 3 (5)   | <b>4 - 10</b> | (0) 2 (3 5) | (0 2) 4 (5)   | <b>4 - 11</b> | (0) 1 (3 5)   | 11 (0 2 5)  | <b>4 - 13</b>         | (0 3 5) 6             | (0 2 5) 6   | <b>4 - 15</b> | 11 (0 3 5)  | 10 (0 2 5)   | <b>4 - 22</b> | (0 3 5) 7             | (0 2 5) 7   | <b>4 - 23</b> | 10 (0 3 5)    | 9 (0 2 5)   | <b>4 - 26</b> | (0 3 5) 8     | (0 2 5) 8   | <b>4 - 29</b> | 9 (0 2 3)     | <table border="1"> <tr> <th>[0 3 6]</th> <th>Tetracorde Resultante</th> <th>[0 3 6]</th> </tr> <tr> <td>(0) 2 (3 6)</td> <td><b>4 - 12</b></td> <td>(0 3) 4 (6)</td> </tr> <tr> <td>(0) 1 (3 6)</td> <td><b>4 - 13</b></td> <td>(0 3) 5 (6)</td> </tr> <tr> <td>(0 3 6) 7</td> <td><b>4 - 18</b></td> <td>11 (0 3 6)</td> </tr> <tr> <td>(0 3 6) 8</td> <td><b>4 - 17</b></td> <td>10 (0 3 6)</td> </tr> <tr> <td>(0 3 6) 9</td> <td><b>4 - 28</b></td> <td>9 (0 3 6)</td> </tr> </table> | [0 3 6]       | Tetracorde Resultante | [0 3 6]     | (0) 2 (3 6)   | <b>4 - 12</b> | (0 3) 4 (6) | (0) 1 (3 6)   | <b>4 - 13</b> | (0 3) 5 (6) | (0 3 6) 7     | <b>4 - 18</b> | 11 (0 3 6)   | (0 3 6) 8 | <b>4 - 17</b>         | 10 (0 3 6)            | (0 3 6) 9   | <b>4 - 28</b> | 9 (0 3 6)   |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| [0 1 2]  | Tetracorde Resultante | [0 1 2]               |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 2) 3  | <b>4 - 1</b>          | 11 (0 1 2)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 2) 4  | <b>4 - 2</b>          | 10 (0 1 2)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 2) 5  | <b>4 - 4</b>          | 9 (0 1 2)             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 2) 6  | <b>4 - 5</b>          | 8 (0 1 2)             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 2) 7  | <b>4 - 6</b>          | 7 (0 1 2)             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| [0 1 5]  | Tetracorde Resultante | (Inversão)<br>[0 4 5] |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1) 2 (5)  | <b>4 - 4</b>          | (0) 3 (4 5)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 11 (0 1 5)   | <b>4 - 5</b>          | (0 4 5) 6             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1) 4 (5)  | <b>4 - 7</b>          | (0) 1 (4 5)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 5) 6  | <b>4 - 8</b>          | 11 (0 4 5)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1) 3 (5)  | <b>4 - 11</b>         | (0 2) 4 (5)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 10 (0 1 5)   | <b>4 - 14</b>         | (0 4 5) 7             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 5) 7  | <b>4 - 16</b>         | 10 (0 4 5)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 9 (0 1 5)  | <b>4 - 19</b>         | (0 4 5) 8             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 5) 8  | <b>4 - 20</b>         | 9 (0 4 5)             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| [0 2 5]  | Tetracorde Resultante | (Inversão)<br>[0 3 5] |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0) 1 (2 5)  | <b>4 - 4</b>          | (0 3) 4 (5)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2) 3 (5)  | <b>4 - 10</b>         | (0) 2 (3 5)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2) 4 (5)  | <b>4 - 11</b>         | (0) 1 (3 5)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 11 (0 2 5)   | <b>4 - 13</b>         | (0 3 5) 6             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2 5) 6  | <b>4 - 15</b>         | 11 (0 3 5)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 10 (0 2 5)   | <b>4 - 22</b>         | (0 3 5) 7             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2 5) 7  | <b>4 - 23</b>         | 10 (0 3 5)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 9 (0 2 5)  | <b>4 - 26</b>         | (0 3 5) 8             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2 5) 8  | <b>4 - 29</b>         | 9 (0 2 3)             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| [0 3 6]  | Tetracorde Resultante | [0 3 6]               |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0) 2 (3 6)  | <b>4 - 12</b>         | (0 3) 4 (6)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0) 1 (3 6)  | <b>4 - 13</b>         | (0 3) 5 (6)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 3 6) 7  | <b>4 - 18</b>         | 11 (0 3 6)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 3 6) 8  | <b>4 - 17</b>         | 10 (0 3 6)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 3 6) 9  | <b>4 - 28</b>         | 9 (0 3 6)             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| <b>3 - 2</b>   | <b>3 - 5</b>          | <b>3 - 8</b>          | <b>3 - 11</b>         |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| <table border="1"> <tr> <th>[0 1 3]</th> <th>Tetracorde Resultante</th> <th>(Inversão)<br/>[0 2 3]</th> </tr> <tr> <td>(0 1) 2 (3)</td> <td><b>4 - 1</b></td> <td>(0) 1 (2 3)</td> </tr> <tr> <td>11 (0 1 3)</td> <td><b>4 - 2</b></td> <td>(0 2 3) 4</td> </tr> <tr> <td>(0 1 3) 4</td> <td><b>4 - 3</b></td> <td>11 (0 2 3)</td> </tr> <tr> <td>10 (0 1 3)</td> <td><b>4 - 10</b></td> <td>(0 2 3) 5</td> </tr> <tr> <td>(0 1 3) 5</td> <td><b>4 - 11</b></td> <td>10 (0 2 3)</td> </tr> <tr> <td>9 (0 1 3)</td> <td><b>4 - 12</b></td> <td>(0 2 3) 6</td> </tr> <tr> <td>(0 1 3) 6</td> <td><b>4 - 13</b></td> <td>9 (0 2 3)</td> </tr> <tr> <td>8 (0 1 3)</td> <td><b>4 - 14</b></td> <td>(0 2 3) 7</td> </tr> <tr> <td>(0 1 3) 7</td> <td><b>4 - 29</b></td> <td>8 (0 2 3)</td> </tr> </table>    | [0 1 3]               | Tetracorde Resultante | (Inversão)<br>[0 2 3] | (0 1) 2 (3) | <b>4 - 1</b> | (0) 1 (2 3) | 11 (0 1 3)  | <b>4 - 2</b> | (0 2 3) 4   | (0 1 3) 4  | <b>4 - 3</b> | 11 (0 2 3) | 10 (0 1 3) | <b>4 - 10</b> | (0 2 3) 5  | (0 1 3) 5  | <b>4 - 11</b> | 10 (0 2 3) | 9 (0 1 3)  | <b>4 - 12</b> | (0 2 3) 6             | (0 1 3) 6             | <b>4 - 13</b> | 9 (0 2 3)    | 8 (0 1 3)   | <b>4 - 14</b> | (0 2 3) 7    | (0 1 3) 7 | <b>4 - 29</b> | 8 (0 2 3)    | <table border="1"> <tr> <th>[0 1 6]</th> <th>Tetracorde Resultante</th> <th>(Inversão)<br/>[0 5 6]</th> </tr> <tr> <td>(0 1) 2 (6)</td> <td><b>4 - 5</b></td> <td>(0) 4 (5 6)</td> </tr> <tr> <td>11 (0 1 6)</td> <td><b>4 - 6</b></td> <td>(0 5 6) 7</td> </tr> <tr> <td>(0 1 6) 4</td> <td><b>4 - 8</b></td> <td>(0) 1 (5 6)</td> </tr> <tr> <td>10 (0 1 6)</td> <td><b>4 - 9</b></td> <td>11 (0 5 6)</td> </tr> <tr> <td>(0 1 6) 5</td> <td><b>4 - 13</b></td> <td>(0) 3 (5 6)</td> </tr> <tr> <td>9 (0 1 6)</td> <td><b>4 - 15</b></td> <td>(0) 2 (5 6)</td> </tr> <tr> <td>(0 1 6) 6</td> <td><b>4 - 16</b></td> <td>10 (0 5 6)</td> </tr> <tr> <td>8 (0 1 6)</td> <td><b>4 - 18</b></td> <td>(0 5 6) 9</td> </tr> <tr> <td>(0 1 6) 7</td> <td><b>4 - 29</b></td> <td>(0 5 6) 8</td> </tr> </table> | [0 1 6]   | Tetracorde Resultante | (Inversão)<br>[0 5 6] | (0 1) 2 (6) | <b>4 - 5</b>  | (0) 4 (5 6) | 11 (0 1 6) | <b>4 - 6</b>  | (0 5 6) 7  | (0 1 6) 4 | <b>4 - 8</b>  | (0) 1 (5 6) | 10 (0 1 6) | <b>4 - 9</b>  | 11 (0 5 6) | (0 1 6) 5 | <b>4 - 13</b> | (0) 3 (5 6) | 9 (0 1 6)   | <b>4 - 15</b> | (0) 2 (5 6)           | (0 1 6) 6             | <b>4 - 16</b> | 10 (0 5 6)   | 8 (0 1 6)   | <b>4 - 18</b> | (0 5 6) 9     | (0 1 6) 7   | <b>4 - 29</b> | (0 5 6) 8     | <table border="1"> <tr> <th>[0 2 6]</th> <th>Tetracorde Resultante</th> <th>(Inversão)<br/>[0 4 6]</th> </tr> <tr> <td>(0) 1 (2 6)</td> <td><b>4 - 5</b></td> <td>(0 4) 5 (6)</td> </tr> <tr> <td>(0 2) 3 (6)</td> <td><b>4 - 12</b></td> <td>(0) 3 (4 6)</td> </tr> <tr> <td>(0 2) 5 (6)</td> <td><b>4 - 15</b></td> <td>(0) 1 (4 6)</td> </tr> <tr> <td>(0 2 6) 7</td> <td><b>4 - 16</b></td> <td>11 (0 4 6)</td> </tr> <tr> <td>(0 2) 4 (6)</td> <td><b>4 - 21</b></td> <td>(0) 2 (4 6)</td> </tr> <tr> <td>10 (0 2 6)</td> <td><b>4 - 24</b></td> <td>(0 4 6) 8</td> </tr> <tr> <td>(0 2 6) 8</td> <td><b>4 - 25</b></td> <td>10 (0 4 6)</td> </tr> <tr> <td>9 (0 2 6)</td> <td><b>4 - 27</b></td> <td>(0 4 6) 9</td> </tr> <tr> <td>11 (0 2 6)</td> <td><b>4 - 29</b></td> <td>(0 4 6) 7</td> </tr> </table> | [0 2 6]     | Tetracorde Resultante | (Inversão)<br>[0 4 6] | (0) 1 (2 6) | <b>4 - 5</b>  | (0 4) 5 (6) | (0 2) 3 (6)  | <b>4 - 12</b> | (0) 3 (4 6)           | (0 2) 5 (6) | <b>4 - 15</b> | (0) 1 (4 6)   | (0 2 6) 7   | <b>4 - 16</b> | 11 (0 4 6)    | (0 2) 4 (6) | <b>4 - 21</b> | (0) 2 (4 6)   | 10 (0 2 6)  | <b>4 - 24</b> | (0 4 6) 8             | (0 2 6) 8   | <b>4 - 25</b> | 10 (0 4 6)    | 9 (0 2 6)   | <b>4 - 27</b> | (0 4 6) 9     | 11 (0 2 6)  | <b>4 - 29</b> | (0 4 6) 7     | <table border="1"> <tr> <th>[0 3 7]</th> <th>Tetracorde Resultante</th> <th>(Inversão)<br/>[0 4 7]</th> </tr> <tr> <td>(0) 2 (3 7)</td> <td><b>4 - 14</b></td> <td>(0 4) 5 (7)</td> </tr> <tr> <td>(0 3) 4 (7)</td> <td><b>4 - 17</b></td> <td>(0) 3 (4 7)</td> </tr> <tr> <td>(0 3) 6 (7)</td> <td><b>4 - 18</b></td> <td>(0) 1 (4 7)</td> </tr> <tr> <td>11 (0 3 7)</td> <td><b>4 - 19</b></td> <td>(0 4 7) 8</td> </tr> <tr> <td>(0 3 7) 8</td> <td><b>4 - 20</b></td> <td>11 (0 4 7)</td> </tr> <tr> <td>(0 3) 5 (7)</td> <td><b>4 - 22</b></td> <td>(0) 2 (4 7)</td> </tr> <tr> <td>10 (0 3 7)</td> <td><b>4 - 26</b></td> <td>(0 4 7) 9</td> </tr> <tr> <td>(0 3 7) 9</td> <td><b>4 - 27</b></td> <td>10 (0 4 7)</td> </tr> <tr> <td>(0) 1 (3 7)</td> <td><b>4 - 29</b></td> <td>(0) 4 (6 7)</td> </tr> </table> | [0 3 7]   | Tetracorde Resultante | (Inversão)<br>[0 4 7] | (0) 2 (3 7) | <b>4 - 14</b> | (0 4) 5 (7) | (0 3) 4 (7) | <b>4 - 17</b> | (0) 3 (4 7) | (0 3) 6 (7) | <b>4 - 18</b> | (0) 1 (4 7) | 11 (0 3 7) | <b>4 - 19</b> | (0 4 7) 8 | (0 3 7) 8 | <b>4 - 20</b> | 11 (0 4 7) | (0 3) 5 (7) | <b>4 - 22</b> | (0) 2 (4 7) | 10 (0 3 7) | <b>4 - 26</b> | (0 4 7) 9 | (0 3 7) 9 | <b>4 - 27</b> | 10 (0 4 7) | (0) 1 (3 7) | <b>4 - 29</b> | (0) 4 (6 7) |
| [0 1 3]  | Tetracorde Resultante | (Inversão)<br>[0 2 3] |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1) 2 (3)  | <b>4 - 1</b>          | (0) 1 (2 3)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 11 (0 1 3)   | <b>4 - 2</b>          | (0 2 3) 4             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 3) 4  | <b>4 - 3</b>          | 11 (0 2 3)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 10 (0 1 3)   | <b>4 - 10</b>         | (0 2 3) 5             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 3) 5  | <b>4 - 11</b>         | 10 (0 2 3)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 9 (0 1 3)  | <b>4 - 12</b>         | (0 2 3) 6             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 3) 6  | <b>4 - 13</b>         | 9 (0 2 3)             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 8 (0 1 3)  | <b>4 - 14</b>         | (0 2 3) 7             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 3) 7  | <b>4 - 29</b>         | 8 (0 2 3)             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| [0 1 6]  | Tetracorde Resultante | (Inversão)<br>[0 5 6] |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1) 2 (6)  | <b>4 - 5</b>          | (0) 4 (5 6)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 11 (0 1 6)   | <b>4 - 6</b>          | (0 5 6) 7             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 6) 4  | <b>4 - 8</b>          | (0) 1 (5 6)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 10 (0 1 6)   | <b>4 - 9</b>          | 11 (0 5 6)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 6) 5  | <b>4 - 13</b>         | (0) 3 (5 6)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 9 (0 1 6)  | <b>4 - 15</b>         | (0) 2 (5 6)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 6) 6  | <b>4 - 16</b>         | 10 (0 5 6)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 8 (0 1 6)  | <b>4 - 18</b>         | (0 5 6) 9             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 6) 7  | <b>4 - 29</b>         | (0 5 6) 8             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| [0 2 6]  | Tetracorde Resultante | (Inversão)<br>[0 4 6] |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0) 1 (2 6)  | <b>4 - 5</b>          | (0 4) 5 (6)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2) 3 (6)  | <b>4 - 12</b>         | (0) 3 (4 6)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2) 5 (6)  | <b>4 - 15</b>         | (0) 1 (4 6)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2 6) 7  | <b>4 - 16</b>         | 11 (0 4 6)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2) 4 (6)  | <b>4 - 21</b>         | (0) 2 (4 6)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 10 (0 2 6)   | <b>4 - 24</b>         | (0 4 6) 8             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2 6) 8  | <b>4 - 25</b>         | 10 (0 4 6)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 9 (0 2 6)  | <b>4 - 27</b>         | (0 4 6) 9             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 11 (0 2 6)   | <b>4 - 29</b>         | (0 4 6) 7             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| [0 3 7]  | Tetracorde Resultante | (Inversão)<br>[0 4 7] |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0) 2 (3 7)  | <b>4 - 14</b>         | (0 4) 5 (7)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 3) 4 (7)  | <b>4 - 17</b>         | (0) 3 (4 7)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 3) 6 (7)  | <b>4 - 18</b>         | (0) 1 (4 7)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 11 (0 3 7)   | <b>4 - 19</b>         | (0 4 7) 8             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 3 7) 8  | <b>4 - 20</b>         | 11 (0 4 7)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 3) 5 (7)  | <b>4 - 22</b>         | (0) 2 (4 7)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 10 (0 3 7)   | <b>4 - 26</b>         | (0 4 7) 9             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 3 7) 9  | <b>4 - 27</b>         | 10 (0 4 7)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0) 1 (3 7)  | <b>4 - 29</b>         | (0) 4 (6 7)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| <b>3 - 3</b>   | <b>3 - 6</b>          | <b>3 - 9</b>          | <b>3 - 12</b>         |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| <table border="1"> <tr> <th>[0 1 4]</th> <th>Tetracorde Resultante</th> <th>(Inversão)<br/>[0 3 4]</th> </tr> <tr> <td>(0 1) 2 (4)</td> <td><b>4 - 2</b></td> <td>(0) 2 (3 4)</td> </tr> <tr> <td>(0 1) 3 (4)</td> <td><b>4 - 3</b></td> <td>(0) 1 (3 4)</td> </tr> <tr> <td>11 (0 1 4)</td> <td><b>4 - 4</b></td> <td>(0 3 4) 5</td> </tr> <tr> <td>(0 1 4) 5</td> <td><b>4 - 7</b></td> <td>11 (0 3 4)</td> </tr> <tr> <td>10 (0 1 4)</td> <td><b>4 - 12</b></td> <td>(0 3 4) 6</td> </tr> <tr> <td>(0 1 4) 6</td> <td><b>4 - 15</b></td> <td>10 (0 3 4)</td> </tr> <tr> <td>9 (0 1 4)</td> <td><b>4 - 17</b></td> <td>(0 3 4) 7</td> </tr> <tr> <td>(0 1 4) 7</td> <td><b>4 - 18</b></td> <td>9 (0 3 4)</td> </tr> <tr> <td>8 (0 1 4)</td> <td><b>4 - 19</b></td> <td>(0 3 4) 8</td> </tr> </table> | [0 1 4]               | Tetracorde Resultante | (Inversão)<br>[0 3 4] | (0 1) 2 (4) | <b>4 - 2</b> | (0) 2 (3 4) | (0 1) 3 (4) | <b>4 - 3</b> | (0) 1 (3 4) | 11 (0 1 4) | <b>4 - 4</b> | (0 3 4) 5  | (0 1 4) 5  | <b>4 - 7</b>  | 11 (0 3 4) | 10 (0 1 4) | <b>4 - 12</b> | (0 3 4) 6  | (0 1 4) 6  | <b>4 - 15</b> | 10 (0 3 4)            | 9 (0 1 4)             | <b>4 - 17</b> | (0 3 4) 7    | (0 1 4) 7   | <b>4 - 18</b> | 9 (0 3 4)    | 8 (0 1 4) | <b>4 - 19</b> | (0 3 4) 8    | <table border="1"> <tr> <th>[0 2 4]</th> <th>Tetracorde Resultante</th> <th>[0 2 4]</th> </tr> <tr> <td>(0) 1 (2 4)</td> <td><b>4 - 2</b></td> <td>(0 2) 3 (4)</td> </tr> <tr> <td>(0 2 4) 5</td> <td><b>4 - 11</b></td> <td>11 (0 2 4)</td> </tr> <tr> <td>(0 2 4) 6</td> <td><b>4 - 21</b></td> <td>10 (0 2 4)</td> </tr> <tr> <td>(0 2 4) 7</td> <td><b>4 - 22</b></td> <td>9 (0 2 4)</td> </tr> <tr> <td>(0 2 4) 8</td> <td><b>4 - 24</b></td> <td>8 (0 2 4)</td> </tr> </table>   | [0 2 4]   | Tetracorde Resultante | [0 2 4]               | (0) 1 (2 4) | <b>4 - 2</b>  | (0 2) 3 (4) | (0 2 4) 5  | <b>4 - 11</b> | 11 (0 2 4) | (0 2 4) 6 | <b>4 - 21</b> | 10 (0 2 4)  | (0 2 4) 7  | <b>4 - 22</b> | 9 (0 2 4)  | (0 2 4) 8 | <b>4 - 24</b> | 8 (0 2 4)   | <table border="1"> <tr> <th>[0 2 7]</th> <th>Tetracorde Resultante</th> <th>[0 2 7]</th> </tr> <tr> <td>(0) 1 (2 7)</td> <td><b>4 - 6</b></td> <td>(0) 1 (2 7)</td> </tr> <tr> <td>(0 2) 3 (7)</td> <td><b>4 - 14</b></td> <td>(0 2 7) 11</td> </tr> <tr> <td>(0 2) 6 (7)</td> <td><b>4 - 16</b></td> <td>(0 2 7) 8</td> </tr> <tr> <td>(0 2) 4 (7)</td> <td><b>4 - 22</b></td> <td>(0 2 7) 10</td> </tr> <tr> <td>(0 2) 5 (7)</td> <td><b>4 - 23</b></td> <td>(0 2 7) 9</td> </tr> </table>  | [0 2 7]       | Tetracorde Resultante | [0 2 7]               | (0) 1 (2 7)   | <b>4 - 6</b> | (0) 1 (2 7) | (0 2) 3 (7)   | <b>4 - 14</b> | (0 2 7) 11  | (0 2) 6 (7)   | <b>4 - 16</b> | (0 2 7) 8   | (0 2) 4 (7) | <b>4 - 22</b>         | (0 2 7) 10            | (0 2) 5 (7) | <b>4 - 23</b> | (0 2 7) 9   | <table border="1"> <tr> <th>[0 4 8]</th> <th>Tetracorde Resultante</th> <th>[0 4 8]</th> </tr> <tr> <td>(0) 1 (4 8)</td> <td><b>4 - 19</b></td> <td>(0) 3 (4 8)</td> </tr> <tr> <td>(0 4) 5 (8)</td> <td><b>4 - 19</b></td> <td>(0 4) 7 (8)</td> </tr> <tr> <td>(0 4 8) 9</td> <td><b>4 - 19</b></td> <td>11 (0 4 8)</td> </tr> <tr> <td>(0) 2 (4 8)</td> <td><b>4 - 24</b></td> <td>(0 4) 6 (8)</td> </tr> <tr> <td>(0 4 8) 10</td> <td><b>4 - 24</b></td> <td>10 (0 4 8)</td> </tr> </table> | [0 4 8]       | Tetracorde Resultante | [0 4 8]     | (0) 1 (4 8)   | <b>4 - 19</b> | (0) 3 (4 8) | (0 4) 5 (8)   | <b>4 - 19</b> | (0 4) 7 (8) | (0 4 8) 9     | <b>4 - 19</b> | 11 (0 4 8)  | (0) 2 (4 8)   | <b>4 - 24</b>         | (0 4) 6 (8) | (0 4 8) 10    | <b>4 - 24</b> | 10 (0 4 8)  |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| [0 1 4]  | Tetracorde Resultante | (Inversão)<br>[0 3 4] |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1) 2 (4)  | <b>4 - 2</b>          | (0) 2 (3 4)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1) 3 (4)  | <b>4 - 3</b>          | (0) 1 (3 4)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 11 (0 1 4)   | <b>4 - 4</b>          | (0 3 4) 5             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 4) 5  | <b>4 - 7</b>          | 11 (0 3 4)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 10 (0 1 4)   | <b>4 - 12</b>         | (0 3 4) 6             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 4) 6  | <b>4 - 15</b>         | 10 (0 3 4)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 9 (0 1 4)  | <b>4 - 17</b>         | (0 3 4) 7             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 1 4) 7  | <b>4 - 18</b>         | 9 (0 3 4)             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| 8 (0 1 4)  | <b>4 - 19</b>         | (0 3 4) 8             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| [0 2 4]  | Tetracorde Resultante | [0 2 4]               |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0) 1 (2 4)  | <b>4 - 2</b>          | (0 2) 3 (4)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2 4) 5  | <b>4 - 11</b>         | 11 (0 2 4)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2 4) 6  | <b>4 - 21</b>         | 10 (0 2 4)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2 4) 7  | <b>4 - 22</b>         | 9 (0 2 4)             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2 4) 8  | <b>4 - 24</b>         | 8 (0 2 4)             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| [0 2 7]  | Tetracorde Resultante | [0 2 7]               |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0) 1 (2 7)  | <b>4 - 6</b>          | (0) 1 (2 7)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2) 3 (7)  | <b>4 - 14</b>         | (0 2 7) 11            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2) 6 (7)  | <b>4 - 16</b>         | (0 2 7) 8             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2) 4 (7)  | <b>4 - 22</b>         | (0 2 7) 10            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 2) 5 (7)  | <b>4 - 23</b>         | (0 2 7) 9             |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| [0 4 8]  | Tetracorde Resultante | [0 4 8]               |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0) 1 (4 8)  | <b>4 - 19</b>         | (0) 3 (4 8)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 4) 5 (8)  | <b>4 - 19</b>         | (0 4) 7 (8)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 4 8) 9  | <b>4 - 19</b>         | 11 (0 4 8)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0) 2 (4 8)  | <b>4 - 24</b>         | (0 4) 6 (8)           |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |
| (0 4 8) 10   | <b>4 - 24</b>         | 10 (0 4 8)            |                       |             |              |             |             |              |             |            |              |            |            |               |            |            |               |            |  |               |                       |                       |               |              |             |               |              |           |               |              |  |           |                       |                       |             |               |             |            |               |            |           |               |             |            |               |            |           |               |             |   |               |                       |                       |               |              |             |               |               |             |               |               |   |             |                       |                       |             |               |             |  |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |   |               |                       |             |               |               |             |               |               |             |               |               |  |           |                       |                       |             |               |             |             |               |             |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |            |               |           |           |               |            |             |               |             |



**Figura 3:** Planilha eletrônica para cálculo automático de dados.

b) anotar o nome do tetracorde na casa específica da planilha;

c) definir o número que converte o tricorde final para a transposição zero.

Tal número é sempre um dos que formam o tricorde, o que permite proceder por tentativa. A planilha indica automaticamente o resultado na linha seguinte, nas três primeiras casas do campo relativo ao tetracorde, seja na forma básica e suas permutações, ou na sua inversão e permutações. Tal transposição tem por objetivo viabilizar a consulta da tabela de tricordes, garantindo assim a fluência do jogo. Note-se que nos campos da direita (azul e laranja) a planilha apresenta os tetracordes sem transposição, com a série propriamente dita disposta na coluna de cor laranja;

d) Conforme já exposto, a única vez que o mediador preenche a sequência completa de 4 notas é na primeira jogada. Nas demais, a planilha calcula automaticamente as três primeiras casas do campo reservado ao tetracorde seguinte (a partir dos procedimentos apresentados anteriormente). De posse de tais dados, o mediador anuncia o tricorde (também indicado pela planilha), e os participantes escolhem um tetracorde, mediante a seleção de uma das notas indicadas no box do tricorde específico. Se o mediador anunciar apenas o nome do tricorde (por exemplo, “3-2”), os jogadores devem selecionar a nota considerando a coluna da esquerda. Caso anuncie “3-2, inversão”, a coluna da direita deve ser utilizada.

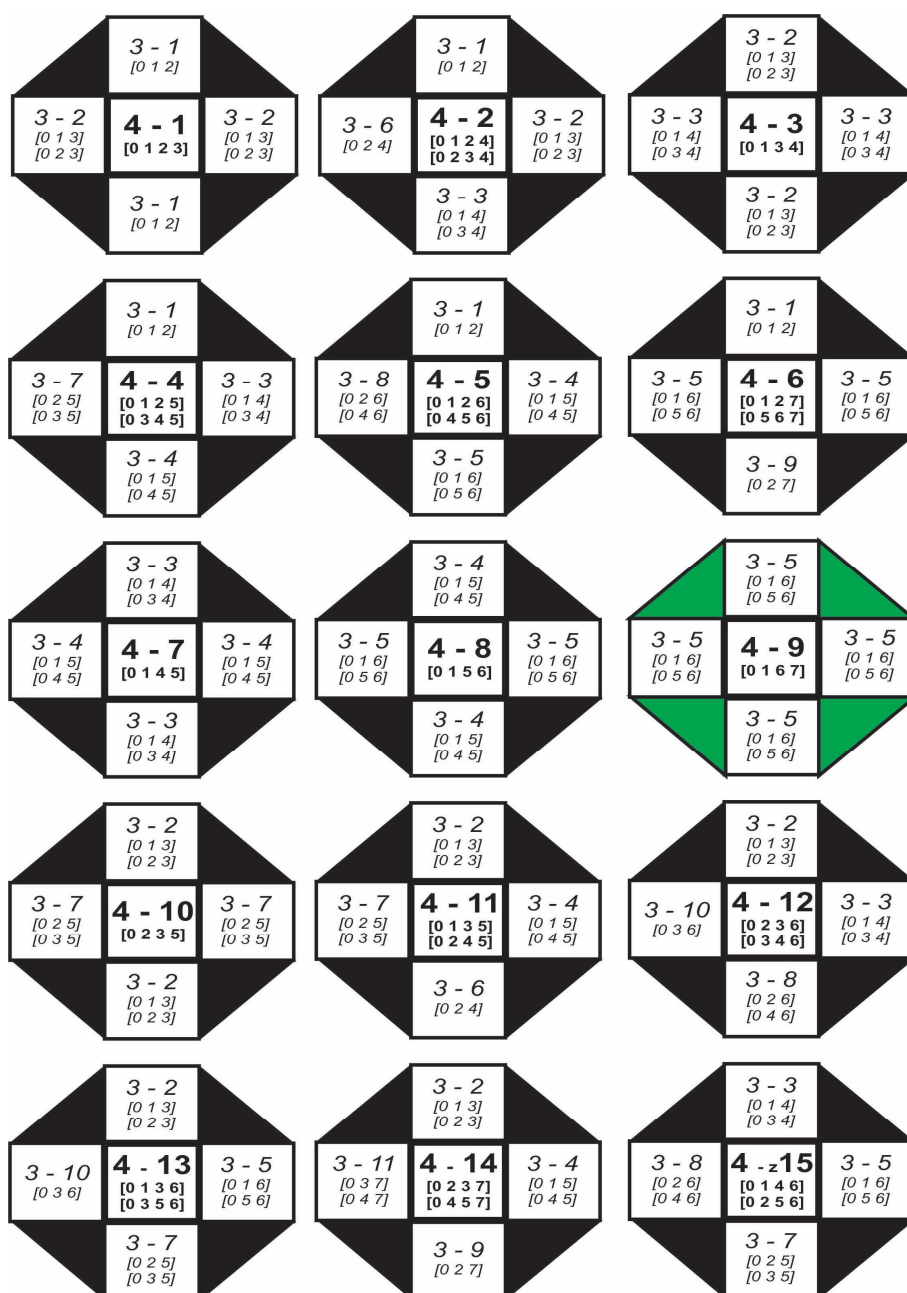


Figura 6: As primeiras 15 peças do jogo.

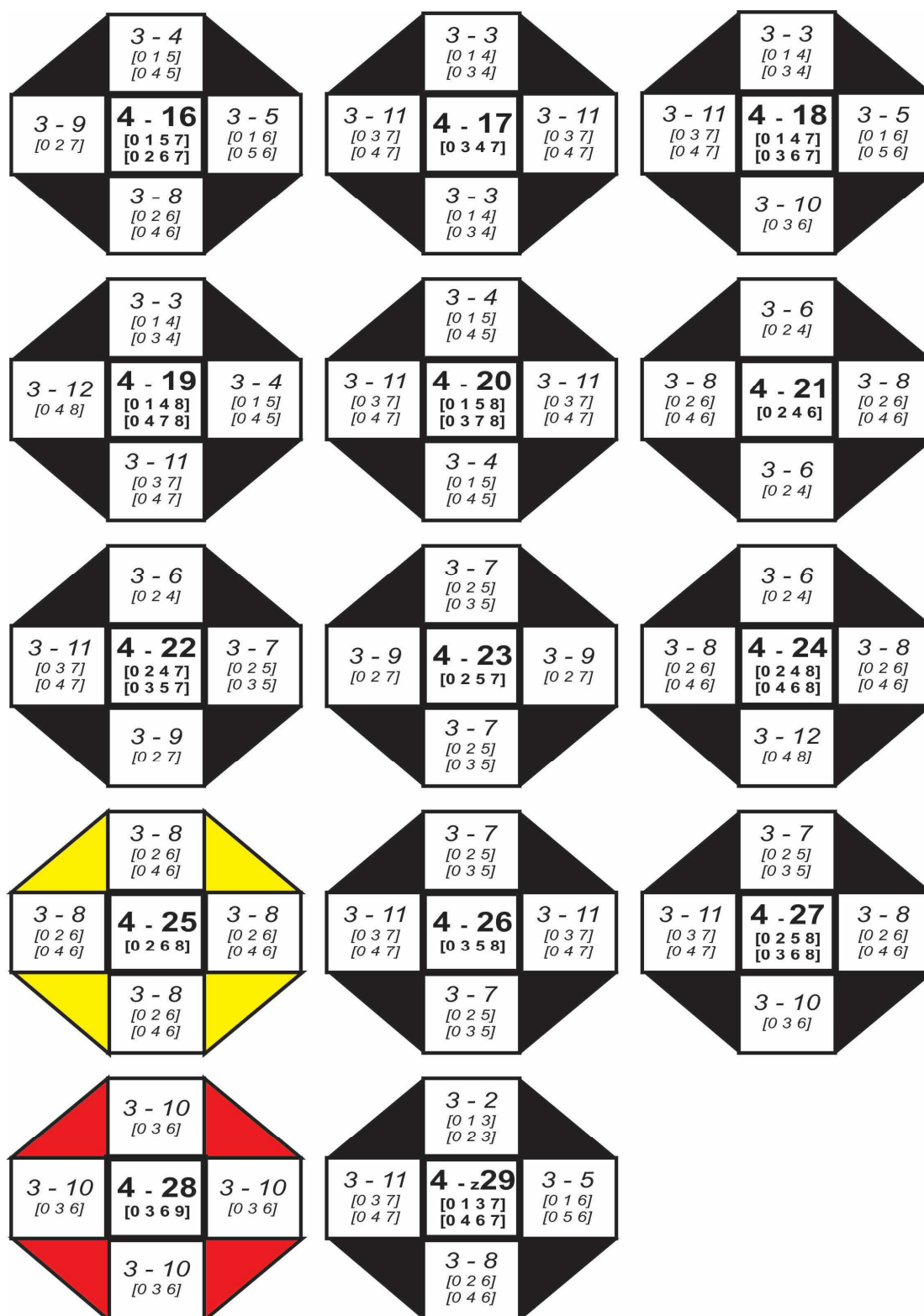


Figura 7: As 14 peças finais.

A planilha tanto pode ser preenchida de cima para baixo quanto de baixo para cima, sempre considerando o campo em verde como referência. Porém, o

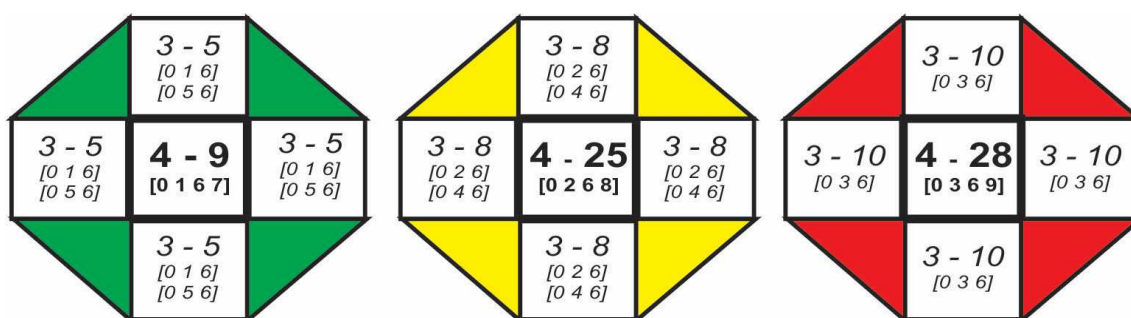
mediador deve atentar para o fato de que, conforme estejam abaixo ou acima da linha inicial, as casas relativas ao número de conversão e à nota que completa o tetracorde surgem invertidas. De forma similar, abaixo da linha verde, a planilha indica automaticamente o tricorde inicial do tetracorde seguinte. Acima desta, o tricorde final do tetracorde anterior. Na prática, tal situação não costuma oferecer maiores dificuldades, sendo este o motivo pelo qual não trataremos dos casos onde é útil inverter a direção de preenchimento. Mesmo assim, nos estágios iniciais do aprendizado é recomendável seguir apenas em uma direção.

A implementação da planilha é razoavelmente simples, envolvendo adição, subtração, reposicionamento das notas e redução ao módulo 12 (ou seja,  $12=0$ ,  $13=1$ ,  $14=2$ , e assim por diante). O cálculo dos tricordes é a operação mais complexa, porém com alguma prática é possível reconhecê-los sem recorrer à planilha.

Encerramos a exposição das regras apresentando o total de peças utilizadas (Figuras 6 e 7). Em seguida, trataremos de estratégias e de aspectos matemáticos que colaboraram na identificação das séries.

#### 4. Estratégias

4-9, 4-25 e 4-28 são as únicas peças formadas por um só tricorde, o que nos levou a destacá-las com cores únicas. Sugerimos a estratégia de encaixá-las tão logo seja possível, antes que se esgotem os tricordes 3-5, 3-8 e 3-10 nas demais peças (Figura 8).



**Figura 8:** As três peças formadas por um único tricorde.

Como veremos, o 4-28 é a peça com menos conexões. Assim, recomenda-se iniciar o jogo pelo 4-9 ou 4-25, e em seguida separar as peças que contêm o tricorde relativo ao tetracorde selecionado, evitando seu uso na medida do possível (lembrando que as chances de encaixe diminuem à medida que o jogo avança).

### 5. Restrições identificadas a partir do tetracorde 4-28

Os testes iniciais demonstraram que seria mais fácil obter séries com 32 notas e 29 tetracordes do que séries de 29 notas, e foi a partir de tais resultados que comprovamos nossa hipótese. Bastou informar ao software uma sequência de 16 números extraída de uma das séries de 32 elementos (demais casas permanecendo em aberto), e em torno de duas horas obtivemos as primeiras séries de 29 notas. Porém, tal recurso elimina os casos que não contenham a sequência selecionada. A fim de expandir as possibilidades de sondagem, buscou-se identificar casos que poderiam ser descartados de antemão. Tais limites foram encontrados no 4-28, que só se conecta aos grupos 4-12, 4-13, 4-18 e 4-27.

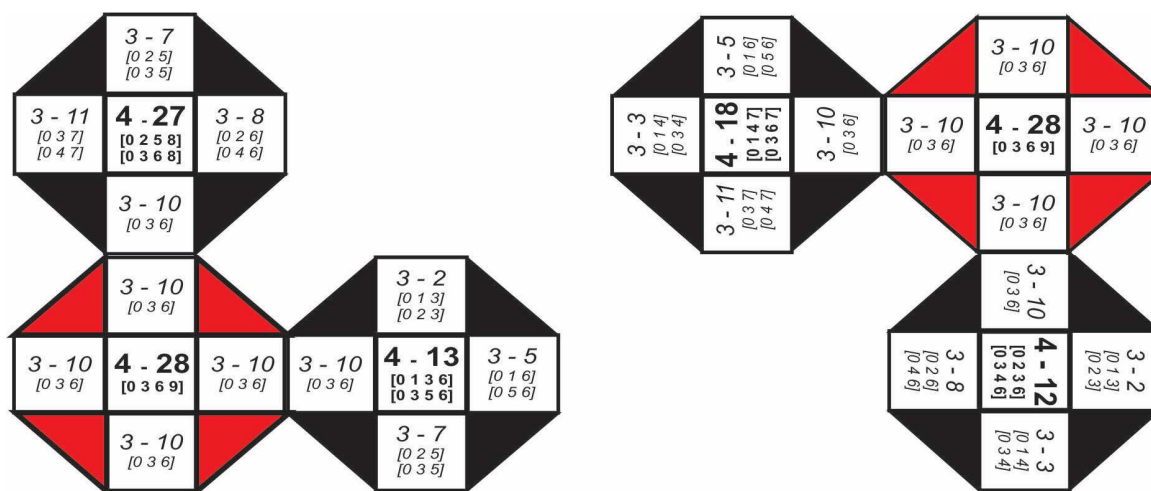


Figura 9: Algumas das possíveis conexões do tetracorde 4-28.

Sendo um tetracorde formado apenas por terças menores, o ciclo sempre retorna ao início depois da quarta nota. Tal princípio reduz significativamente as sequências possíveis, conforme demonstraremos através das permutações do 4-28 (Tabela 5).

Tabela 5: Permutações do 4-28.

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| 0 3 6 9 | 3 0 6 9 | 6 0 3 9 | 9 0 3 6 |
| 0 3 9 6 | 3 0 9 6 | 6 0 9 3 | 9 0 6 3 |
| 0 6 3 9 | 3 6 0 9 | 6 3 0 9 | 9 3 0 6 |
| 0 6 9 3 | 3 6 9 0 | 6 3 9 0 | 9 3 6 0 |
| 0 9 3 6 | 3 9 0 6 | 6 9 0 3 | 9 6 0 3 |
| 0 9 6 3 | 3 9 6 0 | 6 9 3 0 | 9 6 3 0 |

Note-se que as três últimas colunas contêm apenas transposições das sequências da primeira, o que permite eliminá-las (lembrar que estamos lidando com o módulo 12). Além disso, as três últimas permutações da primeira coluna são a inversão e/ou retrogradação transposta das três primeiras, o que nos deixa com apenas três casos: [0 - 3 - 6 - 9], [0 - 3 - 9 - 6] e [0 - 6 - 3 - 9]. Desconsiderando as formas derivadas (inversão, retrogradação, retrogradação da inversão, rotações e transposições), qualquer série de 29 tetracordes utilizará uma destas três sequências.

Podemos ir mais além a partir desta constatação. Conforme visto, apenas os tetracordes 4-12, 4-13, 4-18 e 4-27 podem suceder ou anteceder o 4-28, o que permite estender as possibilidades para sequências de 6 notas. Eliminando retrogradações e inversões, identificamos um total de 72 sequências de 6 notas (Tabela 6).

**Tabela 6:** Possibilidades operacionais de sequências de 6 notas utilizando o 4-28.

|                         |           |            |                         |            |            |
|-------------------------|-----------|------------|-------------------------|------------|------------|
| Sequências 12 - 28 - 13 |           |            | Sequências 13 - 28 - 18 |            |            |
| 2-0369-4                | 2-0639-4  | 11-0396-4  | 1-0369-2                | 1-0639-2   | 10-0396-2  |
| 2-0369-8                | 2-0639-8  | 11-0396-8  | 1-0369-10               | 1-0639-10  | 10-0396-10 |
| 4-0369-4                | 4-0639-4  | 1-0396-4   | 5-0369-2                | 5-0639-2   | 2-0396-2   |
| 4-0369-8                | 4-0639-8  | 1-0396-8   | 5-0369-10               | 5-0639-10  | 2-0396-10  |
| Sequências 12 - 28 - 18 |           |            | Sequências 13 - 28 - 27 |            |            |
| 2-0369-2                | 2-0639-2  | 11-0396-2  | 1-0369-1                | 1-0639-1   | 10-0396-1  |
| 2-0369-10               | 2-0639-10 | 11-0396-10 | 1-0369-11               | 1-0639-11  | 10-0396-11 |
| 4-0369-2                | 4-0639-2  | 1-0396-2   | 5-0369-1                | 5-0639-1   | 2-0396-1   |
| 4-0369-10               | 4-0639-10 | 1-0396-10  | 5-0369-11               | 5-0639-11  | 2-0396-11  |
| Sequências 12 - 28 - 27 |           |            | Sequências 18 - 28 - 27 |            |            |
| 2-0369-1                | 2-0639-1  | 11-0396-1  | 11-0369-1               | 11-0639-1  | 8-0396-1   |
| 2-0369-11               | 2-0639-11 | 11-0396-11 | 11-0369-11              | 11-0639-11 | 4-0396-11  |
| 4-0369-1                | 4-0639-1  | 1-0396-1   | 7-0369-1                | 7-0639-1   | 8-0396-1   |
| 4-0369-11               | 4-0639-11 | 1-0396-11  | 7-0369-11               | 7-0639-11  | 4-0396-11  |

A questão que surge a partir de tais dados: ou alimentar o software com as 72 sequências de 6 notas (menos tempo de processamento, porém mais trabalho braçal da parte do operador) ou com as 3 sequências de 4 notas (mais tempo de processamento com menos trabalho braçal). Com os recursos à disposição no momento, testou-se uma única sequência de 6 notas, e com o programa rodando por aproximadamente um mês obtivemos em torno de 500 séries (algumas delas diferem



por uma única nota). Mesmo consideravelmente reduzido, o tempo de processamento continua alto. No entanto, dada a expansão de possibilidades que o jogo proporcionou à nossa pesquisa, e também do número elevado de soluções obtidas testando apenas uma das sequências, é de se perguntar sobre a necessidade de identificar o total das séries de 29 tetracordes. Caso se faça tal opção, abre-se a possibilidade de criar um software que examine todos os resultados e identifique similaridades, e que também seja capaz de reconhecer se uma determinada sequência de notas se encaixa em algumas das séries.

## **6. Breve consideração sobre o método**

O jogo se baseia na utilização de princípios de uma determinada área para sondar e formatar resultados em outra, favorecendo assim a emergência de possibilidades que não seriam percebidas com ferramentas usuais. Trata-se de uma experiência em afinidade com a noção de metáfora estruturante, conforme apresentada por Steven Johnson (2011) em seu estudo sobre processos criativos. E de acordo com o pensamento sistêmico exposto por O'Connor e McDermot (2007), também é possível identificar na proposta relações circulares, nas quais causa e efeito são intercambiáveis. Em um nível mais básico, temos uma metáfora musical baseada em uma sistematização matemática, sendo que a recíproca também pode ser verdadeira (ainda que o uso da ciência pela arte seja bem mais frequente que o uso da arte pela ciência). E indo um pouco mais além, uma metáfora da própria teoria dos conjuntos, da qual o jogo surge como facilitador, tanto quanto o conhecimento prévio da teoria dos conjuntos facilita o entendimento do jogo. Tal situação onde causa torna-se efeito e vice-versa encontra ressonância com o método que utilizamos: ao basear-se na identificação de propriedades de um sistema numérico a partir da observação direta, o método favoreceu que a maior parte da pesquisa bibliográfica tenha ocorrido após a concepção do jogo, surgindo assim como efeito das conclusões. Em tal pesquisa, o caso com mais afinidade que encontramos foi um jogo intitulado *I – IV – V: The Harmony Card Game* (2008). Nesta proposta, porém, a organização das cartas representa encadeamentos de acordes no contexto tonal.

Em um artigo no qual aborda alguns desafios do ensino de teorias atonais, Cohn (2016, p. 15) destaca o risco de gerar uma hostilidade que se dirija a todo um pensar conceitual sobre música. Ainda que não necessariamente voltado para a composição atonal, dentre as metas de nosso jogo está justamente o estímulo ao

pensamento conceitual, podendo assim se revelar um facilitador da abordagem e concepção de práticas que extrapolem hábitos adquiridos.

## **6. Lembretes e reflexões**

As séries de 29 tetracordes são praticamente desprovidas de recorrências, o que coloca alguns desafios composicionais. Nossa estratégia foi identificar estruturas (escalas pentatônicas, de tons inteiros, acordes etc.) e utilizá-las na criação de um mosaico onde cada trecho reforça sonoridades específicas. Além disso, na medida em que se consolidou o entendimento tanto de relações internas do jogo quanto de aspectos musicais, outras possibilidades foram reveladas. A começar pelas já citadas séries de 32 notas, que surgiram quando se percebeu que, caso a sequência trave antes de esgotar as 29 peças, se pode voltar ao primeiro tetracorde e averiguar a possibilidade de utilizar o tricorde inicial (que permaneceu em aberto), invertendo a direção do encaixe das peças. Em tais séries não há o loop entre início e final, como ocorre nas séries de 29 notas. Fazendo uma analogia com o baralho, as séries de 32 notas seriam como uma canastra suja (mais corriqueira por fazer uso de um coringa para completar a sequência), enquanto séries de 29 notas estão mais para a canastra real (que dispensa o coringa). Outra possibilidade revelada pelas sessões: estabelecer loops menores, que não utilizem todas as peças. Se as séries de 29 tetracordes tendem a ser amotívicadas, o uso de sequências reduzidas permite um maior controle sobre a recorrência dos tricordes. Outros loops complementares podem ser criados com os tetracordes restantes, que por sua vez podem ser combinados de diversas formas (por exemplo, distribuídos entre diferentes vozes, ou no estabelecimento de planos de acompanhamento e solo). E por fim, ao longo das sessões também surgiram casos de séries que completam os 29 tetracordes, porém o tricorde inicial surge transposto no final da série. Até o momento tivemos dois casos: em um deles, o tricorde está transposto uma 2ª maior acima, o que permite 6 ocorrências da série antes que ela volte para a transposição original. No segundo, o tricorde surge transposto uma 2ª menor.

## **7. Final**

Ainda que as explicações que aqui apresentamos possam parecer complexas, na abordagem prática o entendimento do jogo tende a ocorrer de maneira fluida. Finalidades educacionais são uma das possibilidades de uso, e talvez um dos

seus potenciais mais marcantes seja motivar o aprendizado de outras abordagens do fazer musical além daquelas que o aluno está habituado. Em nossa experiência, procurou-se estimular a criação e performance de composições próprias, investigando a sonoridade dos tricordes e tetracordes em suas várias permutações e posições (abertas e fechadas). Recomendamos o debate sobre os possíveis graus de consonância e dissonância conforme o método de contraponto modal proposto por Henry Martin, que cruza a teoria dos conjuntos com o contraponto de Palestrina. Tal autor classifica os intervalos como consonâncias tonais (3<sup>a</sup> menor, 3<sup>a</sup> maior, quinta justa, 6<sup>a</sup> menor e 6<sup>a</sup> maior), consonâncias modais (2<sup>a</sup> maior, quarta justa e 7<sup>a</sup> menor), e dissonâncias (2<sup>as</sup> menores, trítone e 7<sup>a</sup> maior), configurando um guia para o entendimento das sonoridades e possíveis funções que podem assumir acordes construídos sobre relações não necessariamente tonais.

### **Referências:**

COHN, Richard. Teaching Atonal and Beat-Class Theory, Modulo Small. **MusMat: Brazilian Journal of Music and Mathematics**, Rio de Janeiro, v. I, n. 1, p. 15-24, 2016

FORTE, Allen. **The Structure of Atonal Music**. London: Yale University Press, 1977.

HERNANDEZ, Rafael. **IV – V – I: the harmony card game**. Castro Valley: Music Teachers Tools, 2008.

JOHNSON, Steven. **De Onde Vem as Boas Ideias**. Rio de Janeiro: Zahar Editora, 2011.

MARTIN, Henry. Seven Steps to Heaven: A Species Approach to Twentieth-Century Analysis and Composition. **Perspectives of New Music**, Seattle, v. 38, n. 1, p. 129-168, 2000.

MUSIC TEACHERS TOOLS. **Simple solutions for music educators**. Music Teachers Tools, 2017. Disponível em: < <https://musicteachertools.com/>>. Acesso em: 29 out. 2017.

O'CONNOR, Joseph; McDERMOTT, Ian. **Além da Lógica**: utilizando sistemas para a criatividade e a resolução de problemas. Summus Editorial: São Paulo, 2007.

WALTER, D. **Pc set calculator**. 2001. Disponível em: <[http://www.mta.ca/pc-set/calculator/pc\\_calculate.html](http://www.mta.ca/pc-set/calculator/pc_calculate.html)>. Acesso em: 27 out. 2017.

## Utilização do aplicativo de operações lineares *Oplin* como ferramenta de modelagem sistêmica

Max Kühn

Universidade Federal do Rio de Janeiro – maxkuhn@ufrj.br

Claudia Usai

Universidade Federal do Rio de Janeiro – clauusaigom@hotmail.com

Rodrigo Pascale

Universidade Federal do Rio de Janeiro – rodrigo.pascale@yahoo.com.br

Liduíno Pitombeira

Universidade Federal do Rio de Janeiro – pitombeira@musica.ufrj.br

Pauxy Gentil-Nunes

Universidade Federal do Rio de Janeiro – pauxygnunes@gmail.com

**Resumo:** Neste trabalho, demonstramos a utilização do *Oplin*, na determinação do conjunto de operadores lineares da obra *Pirilampos*, de Lorenzo Fernández. A partir desses operadores, que constituem um sistema composicional hipotético, ou seja, um modelo sistêmico para a obra examinada, realizamos o planejamento composicional de uma nova obra para instrumentação distinta da formação original.

**Palavras-chave:** Modelagem sistêmica. Sistema Composicional. Particionamento linear. Operadores lineares. Lorenzo Fernández.

### Using the OPLIN, linear operations application, as a systemic modeling tool

**Abstract:** In this work, we demonstrate the use of *Oplin*, in the determination of the set of linear operators of the work *Pirilampos*, by Lorenzo Fernández. From these operators, which constitute a hypothetical compositional system, that is, a systemic model for the examined work, we performed the compositional planning of a new work for instrumentation distinct of the original.

**Keywords:** Systemic Modeling. Compositional System. Linear Partitioning. Linear Operators. Lorenzo Fernández.

### 1. Introdução

A modelagem sistêmica é uma metodologia analítico-composicional que tem como objetivo principal a proposição de um modelo—ou sistema composicional hipotético—para uma determinada obra musical. Esse modelo consiste unicamente em um conjunto de relações entre objetos, que por sua vez são associados a parâmetros específicos<sup>1</sup>. Tais relações podem se apresentar na forma de declarações formais, algoritmos computacionais ou modelos esquemáticos (incluindo tabelas descritivas de propriedades e comportamentos dos objetos examinados). Assim, por exemplo, o

---

<sup>1</sup> Na modelagem sistêmica utilizamos o conceito expandido de parâmetro musical (PITOMBEIRA, 2017a). Nessa perspectiva, aos parâmetros tradicionalmente considerados no âmbito da teoria musical (tais como altura, duração, dinâmica e timbre) juntam-se estruturas mais abstratas como partições texturais, eixos inversivos e contornos, por exemplo.

conjunto de relações harmônicas de uma obra, na medida em que revela somente a sintaxe entre acordes, se constitui em um modelo sistêmico dessa obra, sob uma perspectiva harmônica. A segunda seção deste trabalho apresenta um maior detalhamento sobre a metodologia da modelagem sistêmica aplicada à composição musical.

Neste trabalho, realizaremos a modelagem sistêmica da obra para piano *Pirilampos*, de Lorenzo Fernández (1897-1948), exclusivamente na perspectiva da teoria das operações lineares, desenvolvida por Pauxy Gentil-Nunes, e que será examinada detalhadamente na terceira seção deste artigo. Após discorrermos sobre os dois suportes teóricos que sustentam este trabalho—modelagem sistêmica e teoria das operações lineares—, descreveremos os procedimentos utilizados na modelagem da obra de Fernández e como o modelo produzido possibilitou a um dos autores planejar e compor o primeiro movimento de uma obra para saxofone soprano e piano.

## **2. Modelagem sistêmica**

Proposta por Liduino Pitombeira, a modelagem sistêmica (MORAES, PITOMBEIRA, LIMA, CASTRO-LIMA, MESQUITA, PASCALE, OLIVEIRA, SILVA, USAI e KÜHN, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016 e 2017) se desenvolveu a partir de uma convergência da teoria da intertextualidade (KRISTEVA, 1980) com a teoria dos sistemas composicionais (LIMA, 2011). A realização da modelagem sistêmica de uma obra original (intertexto) consiste basicamente de três etapas. Na primeira etapa, denominada seleção paramétrica, uma análise prospectiva inicial possibilita a identificação dos parâmetros e da ferramenta analítica com melhor potencial de modelagem.<sup>2</sup> Na segunda fase, a análise propriamente dita, os objetos e suas relações são identificados, produzindo uma estrutura que denominamos perfil composicional. Na última fase, denominada generalização paramétrica, descartam-se os objetos e apenas suas relações são consideradas. A estrutura resultante dessa última fase denomina-se modelo sistêmico ou sistema composicional hipotético. Um resultado imediato desse processo é o esvaziamento estético (total ou parcial) do texto original e isso se torna um fundamento interessante do ponto de vista composicional, uma vez

---

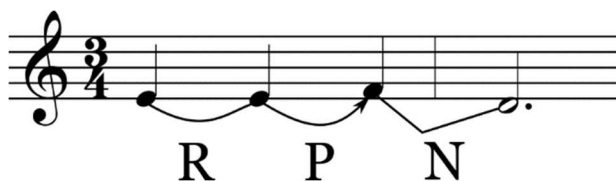
<sup>2</sup> Buscando um equilíbrio entre tautologia e inconsistência. Desta forma, a análise da estrutura harmônica de uma obra tonal construída unicamente com base em tríades maiores e menores produzirá uma tautologia caso a ferramenta utilizada seja a teoria dos conjuntos de classes de notas. Por outro lado, uma obra construída a partir de eixos inversivos (como o primeiro movimento do Op.22 de Webern, por exemplo) pode aparentar uma inconsistência de conexão entre as classes de conjuntos.

que, partindo do modelo, pode-se construir um novo texto, aparentando em nível profundo com o original, mas guardando consideráveis diferenças superficiais.

O processo de criação de uma nova obra, partindo de um modelo sistêmico, passa pelo procedimento que denominamos planejamento composicional, que também pode ser efetivado em três fases: na primeira fase, denominada particularização, as relações são acopladas a novos objetos, produzindo um perfil composicional; na segunda fase, denominada aplicação, esse perfil se transforma em estruturas de superfície (ajustando-se a restrições de registro); na última fase, denominada complementação, os demais parâmetros, desconsiderados durante a modelagem, são arbitrariamente escolhidos e inseridos no texto musical.

### 3. Teoria das operações lineares

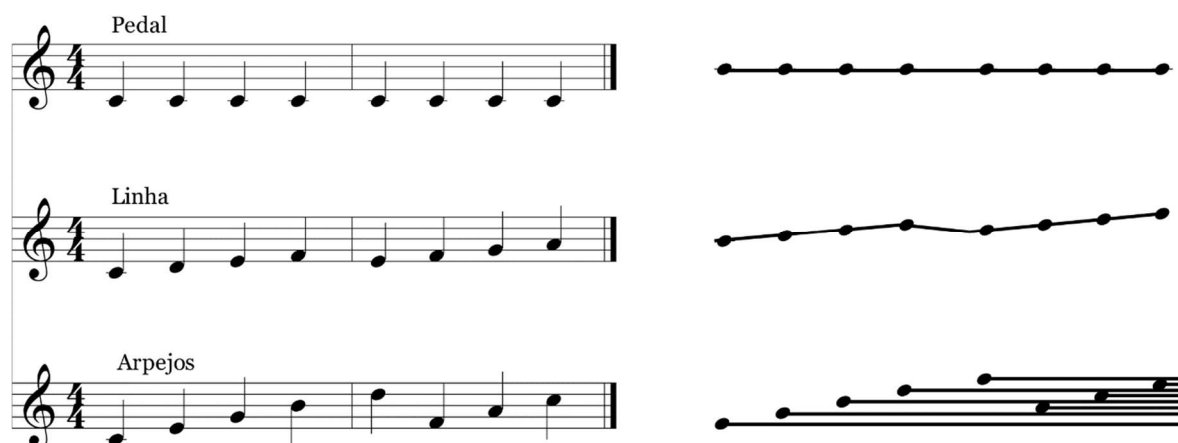
Há três possibilidades básicas de movimento entre duas alturas de uma melodia, as quais são mostradas da Figura 1: repetição (R), portamento (P) e salto (N). Essas possibilidades de movimento podem ser consideradas como operações primitivas que relacionam temporalmente uma determinada altura com sua altura subsequente. A repetição (R) é estática, no sentido de que não há evolução do movimento no espaço de alturas. A aplicação contínua dessa operação produz uma configuração melódica que denominamos de pedal. Já o portamento (P) resulta do movimento por grau conjunto (por segundas) e aplicado continuamente produz uma configuração que denominamos linha. Por sua vez, o salto (N) resulta do movimento disjunto (intervalos iguais ou superiores a uma terça). A aplicação contínua do salto produz configurações denominadas arpejos. Essas três configurações são mostradas na Figura 2.



**Figura 1:** Três operações primitivas entre duas alturas de uma linha melódica: repetição (R), portamento (P) e salto (N).

Enquanto o pedal e a linha produzem um amálgama das alturas em uma estrutura linear única, os arpejos produzem a ativação de diversas linhas virtuais

paralelas.<sup>3</sup> O jogo entre as diversas manifestações (reais e virtuais)<sup>4</sup> das três operações básicas (R, P, N) e a combinação entre elas produz mais quatro operações que são essenciais para a descrição de estruturas melódicas. A combinação de um salto real (N) e um portamento virtual (P') produz a operação de ativação (A). A combinação de um portamento real (P) e um virtual (P') produz uma convergência (C). A combinação de um salto real (N) e uma repetição virtual (R') produz um prolongamento (L). Por fim, a combinação de um salto real (N) com dois portamentos virtuais (P') produz um fechamento. Essas sete operações são exaustivas e nos permitem descrever qualquer configuração melódica. A Figura 3 exemplifica essas operações em um contexto melódico. Em [A] temos uma linha melódica. Em [B] essa melodia é destituída do aspecto rítmico. Em [C] são mostradas as linhas reais (pretas) e virtuais (vermelhas pontilhadas), as operações R, com linha cheia horizontal, as operações P, com linha cheia e seta indicando a direção do movimento, e as operações N, com linha em diversos ângulos (sem setas). As operações virtuais (R' e P') são sempre indicadas em vermelho. Em [D], uma representação em notação musical, mais amigável, indica as operações e uma estrutura denominada *linvector*, que permite a avaliação quantitativa, ou seja, indica o número de linhas (reais e virtuais) ou densidade linear a cada ataque da melodia.<sup>5</sup>

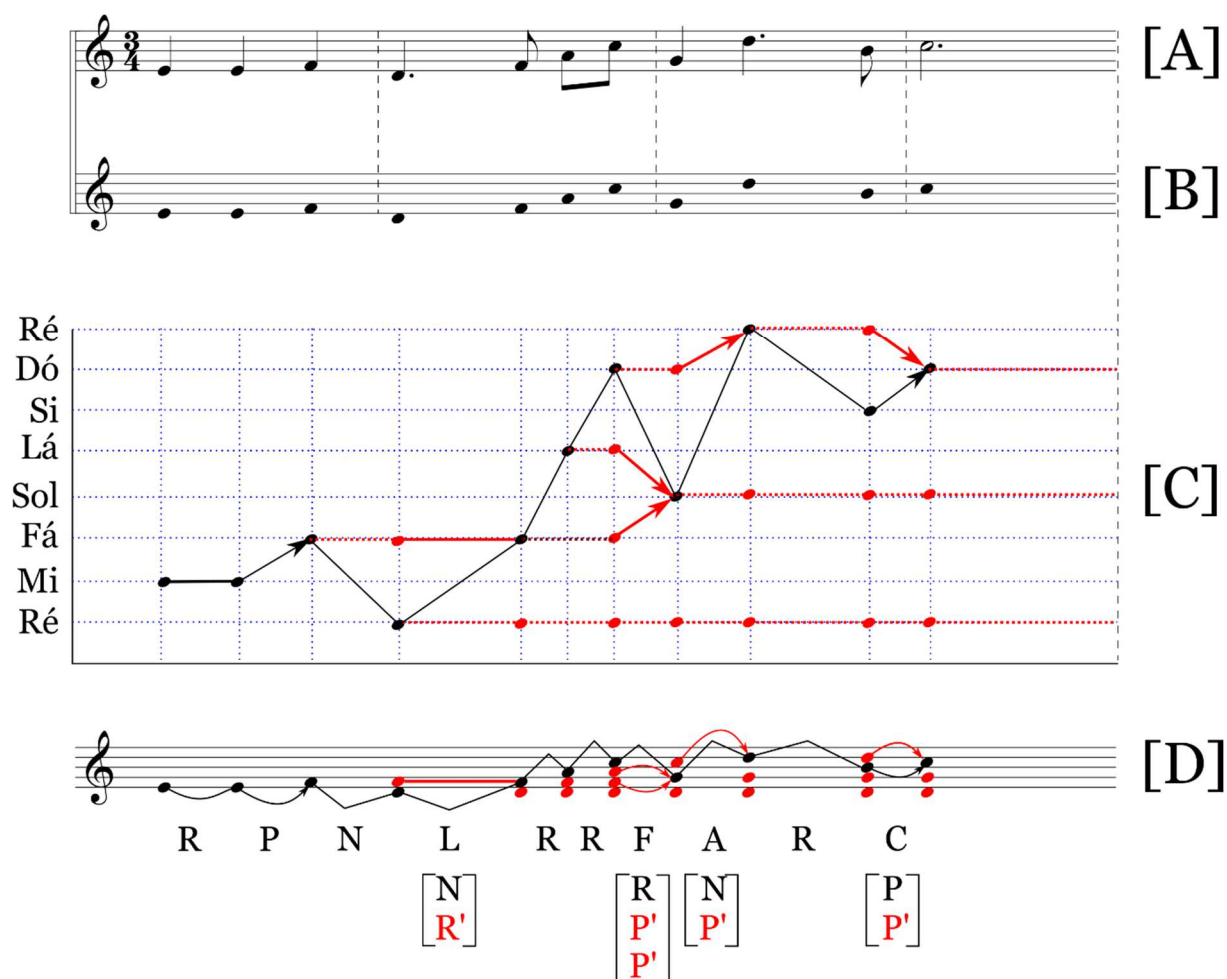


**Figura 2:** Três configurações melódicas produzidas pela aplicação contínua das operações primitivas entre alturas consecutivas.

<sup>3</sup> A base teórica que permitiu ao autor dessa teoria, Pauxy Gentil-Nunes, estabelecer tais configurações, ou seja, os conceitos de conjunção e disjunção melódica e prolongamento, é amplamente discutida em HINDEMITH, 1937; GUERRA-PEIXE, 1988; MEYER, 1973; COSTÈRE, 1954; LESTER, 1982; NARMOUR, 1990 e 1992; e GENTIL-NUNES, 2009.

<sup>4</sup> As operações reais são imediatamente subsequentes e as operações virtuais são interpoladas por outras alturas.

<sup>5</sup> O *linvector* é um componente fundamental no particionamento linear, outra teoria do autor (Pauxy Gentil-Nunes) que se relaciona intimamente com a teoria das operações lineares.



**Figura 3:** Operações lineares aplicadas em um contexto melódico. Em [A] temos uma linha melódica. Em [B] essa melodia é destituída do aspecto rítmico. Em [C] são mostradas as linhas reais (pretas) e virtuais (vermelhas), as operações R, com linha cheia horizontal, as operações P, com linha cheia e seta indicando a direção do movimento, e os saltos com linha em diversos ângulos (sem setas). As operações virtuais (R' e P') são indicadas em vermelho. Em [D] temos uma representação em notação musical com a indicação das operações e do *linvector*.

#### 4. O aplicativo *Oplin*

*Particionamento Linear* é a avaliação das relações quantitativas e qualitativas entre linhas componentes de uma estrutura melódica. De acordo com o número de linhas e suas relações de independência (polifonia implícita) ou dependência (arpejos), são extraídas as configurações de textura melódica (partições) para cada ataque, que indicam comportamentos melódicos dinâmicos. *Partlin* é o aplicativo que perfaz estas operações a partir de um arquivo MIDI monofônico, produzindo gráficos que espelham estas relações e modos e permitem a leitura analítica das características melódicas (GENTIL-NUNES, 2014).

*Oplin* é uma sub-rotina do aplicativo *Partlin*, que basicamente: 1) guarda dinamicamente as notas ativas de cada linha em uma variável chamada de *linvector*



(abreviatura de *linear vector*); 2) compara cada nova altura com *linvector*, classificando esta relação em uma das sete categorias citadas anteriormente (P, N, L, A, F, C, R)<sup>6</sup>, chamadas então de *operações* ou *operadores*; 3) modifica *linvector* para absorver adequadamente a nova altura, adicionando, substituindo ou cancelando alturas anteriores, de acordo com a operação envolvida.

A partir do processamento de *Oplin*, é possível então obter a sequência de operadores referente à estrutura melódica fornecida, visando tanto a análise melódica (tipologia, complexidade, textura, características autorais etc.) quanto a aplicação em processos criativos (modelagem sistêmica).<sup>7</sup>

### 5. Modelagem sistêmica de *Pirilampos*

A Figura 4 mostra os compassos iniciais de *Pirilampos*, quinto movimento de uma obra para piano de Lorenzo Fernández (1897-1948) intitulada *Prelúdios do Crepúsculo*, Op.15.<sup>8</sup> A textura da obra é predominantemente constituída por uma linha melódica que se distribui gerando melodias compostas, arpejos e, ocasionalmente, apresenta notas simultâneas bem como acompanhamento acordal. Tais notas simultâneas, juntamente com as configurações acordais, foram desconsideradas em nossa análise, segundo os seguintes critérios de filtragem: 1) manutenção apenas da nota mais aguda, nos casos de notas simultâneas, exceto quando o compositor indicou, via barramento, uma nota mais grave na melodia, 2) eliminação de camada de acordes, mesmo que ocorra no registro mais agudo e 3) eliminação de notas ornamentais (*grace notes*).<sup>9</sup>

Um arquivo MIDI da obra, já filtrado para eliminação de notas simultâneas (pequeno trecho mostrado na Figura 5a), alimentou o aplicativo *Oplin* produzindo como resultado a sequência de operadores mostrada na Figura 5b. Essa figura, produzida manualmente, também mostra o *linvector* do trecho. Os operadores para a obra completa são mostrados na figura 6. Esses operadores constituem o conjunto de relações entre as alturas, na perspectiva do *particionamento linear*, sem levar em consideração a estrutura fraseológica da obra original. São, portanto, um possível modelo sistêmico para a obra de Fernandez. De posse desse conjunto de relações,

<sup>6</sup> A letra I (início) é usada para a primeira nota sobre a qual não recai nenhuma operação.

<sup>7</sup> Os aplicativos *Oplin* e *Partlin* são disponibilizados gratuitamente no site [musmat.org](http://musmat.org)

<sup>8</sup> Os demais movimentos são *Evocação da Tarde*, *Idílio*, *Ocaso*, e *Angelus*.

<sup>9</sup> Essa filtragem atuou especificamente nos compassos 2, 4, 6, 7, 13, 20, 21, 27-39, 45-60.



*Oplin*. Em seguida, foram adicionados livremente a essa linha os demais parâmetros (durações, dinâmicas, articulações), bem como foram inseridas notas ornamentais livres, transformando-a na linha melódica do saxofone soprano. Eventualmente essa linha migra para o piano com os objetivos de aliviar o saxofonista (em termos musculares e respiratórios) e de evitar o aparecimento de operadores indesejados (especialmente convergência e fechamento), que podem ocorrer em uma tessitura mais reduzida.

[A] *I N L P L A P L A P L A P P N N L P L A P L A P L A P*

[B] 345 AB0125 891456 01569

**Figura 7:** Linhas: *linvector*, operadores lineares em [A] e macroharmonia em [B].

Soprano Sax *f mp cresc.*

Piano *f mp p mf*

$\text{♩} = 72$

$(\text{♩} = \text{♩}) \text{♩} = 108$

**Figura 8:** Compasso iniciais de *Linhas*, de Liduino Pitombeira.

A parte do piano, por sua vez, foi construída com base na macroharmonia<sup>10</sup>

<sup>10</sup> Tymoczko define macroharmonia como a coleção total de notas em uma determinada faixa de tempo musical. No original lê-se: “I use the term ‘macroharmony’ to refer to the total collection of notes heard over moderate spans of musical time”. (TYMOCZKO, 2011, p. 4).

de determinados segmentos da linha melódica arbitrariamente especificados, visando uma endogenia harmônica integral.<sup>11</sup> Os segmentos macroharmônicos foram delimitados na superfície por notas de maior duração em relação às anteriores ou por claros articuladores seccionais (como fermatas, por exemplo).

Na Figura 6a temos a nova melodia criada (notas brancas) e o *linvector*, que facilita a visualização dos operadores. Na Figura 6b, temos a melodia, sem o *linvector*, com indicação da segmentação macroharmônica<sup>12</sup>. Finalmente, na Figura 7, temos o trecho inicial correspondente ao planejamento mostrado na Figura 6.

## 7. Considerações finais

Ao observarmos o resultado do trabalho, verificamos a eficácia da teoria das operações lineares como ferramenta analítica de modelagem sistêmica, especialmente se considerarmos que as duas obras (a original e a nova) apresentam um perfil estético bastante diferenciado. Do ponto de vista teórico, foi bastante interessante e enriquecedor a convergência entre esses dois corpos teóricos desenvolvidos recentemente. Além disso, a modelagem sistêmica se mostrou válida como metodologia pré-composicional, possibilitando também um contato mais profundo com a peça de Lorenzo Fernández.

## Referências:

- BERRY, Wallace. **Structural functions in music**. New York: Dover, 1976.
- CASTRO-LIMA, M.; PITOMBEIRA, L. Composition of two works for woodwind quintet based on the Systemic Modelling of Guarnieri's Ponteio No 25. Congresso da ANPPOM, 25. **Anais...** Vitória: UFES, 2015, p.1-10.
- CASTRO-LIMA, M; MESQUITA, G; PITOMBEIRA, L. Composição do primeiro movimento de Sonatina, para tuba e piano, de Marcel Castro-Lima, a partir da modelagem sistêmica do Ponteio 23 de Camargo Guarnieri. Congresso da ANPPOM, 26. **Anais...** Belo Horizonte: UEMG, 2016, p.1-10.
- COSTÉRE, Edmond. **Mort ou transfiguration de l'harmonie**. Paris: Presses Universitaires de France, 1954.
- FORTE, Allen. **The structure of atonal music**. New Haven: Yale University, 1973.

---

<sup>11</sup> Para um maior aprofundamento no conceito de harmonia endógena ver Pitombeira (2017).

<sup>12</sup> A macroharmonia está indicada com classes de alturas, sendo A = Si bemol e B = Si natural. Desta forma, a primeira macroharmonia da figura 7b é Mi bemol, Mi natural e Fá (345).

GENTIL-NUNES, P. Textura melódica e implementação computacional do Particionamento Linear. Congresso da ANPPOM, 24. **Anais...** São Paulo: UEMG, 2014, p.1-10.

GUERRA-PEIXE, César. **Melos e harmonia acústica**. Rio de Janeiro: Vitale, 1988.

HINDEMITH, Paul. **The craft of musical composition**. London: Schott, 1937.

KRISTEVA, Julia. **Desire in Language: a semiotic approach to literature and art**. Leon S. Roudiez, Ed. Translated by Thomas Gora, Alice Jardine, and Leon S. Roudiez. New York: Columbia University Press, 1980.

KÜHN, M.; USAI, C.; PASCALE, R.; PITOMBEIRA, L. Modelagem sistêmica aplicada à música popular: Imagina, de Tom Jobim Congresso da ANPPOM, 27. **Anais...**Campinas: UNICAMP, 2017, p.1-10.

LESTER, Joel. **Harmony in tonal music**. New York: Alfred A. Knopf, 1982.

LIMA, Flávio. **Desenvolvimento de sistemas composicionais a partir da intertextualidade**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2011.

MEDEIROS, R. J. V.; SANTOS, R. S.; PITOMBEIRA, L. Modelagem Sistêmica baseada em Cadeias de Markov. Congresso da ANPPOM, 21. **Anais...** Uberlândia: p. 1879-1885, 2011.

MESQUITA, G.; CASTRO-LIMA, M.; PITOMBEIRA, L. Composição de Suíte de Seis Segundos Sentidos a Cinco Sopros, de Gabriel Mesquita, a partir de articulações semânticas entre procedimentos composicionais e imagens poéticas extramusicais. Congresso da ANPPOM, 27. **Anais...**Campinas: UNICAMP, 2017, p.1-10.

MEYER, Leonard B. **Emotion and meaning in music**. London: University of Chicago, 1956.

MEYER, Leonard B. **Explaining Music**. Berkeley: University of California, 1973.

MORAES, P. M.; CASTRO, G.; PITOMBEIRA, Liduino. Procedimentos Composicionais utilizados no Ponteio Nº 2 de Pedro Miguel a partir da modelagem do Ponteio Nº 12 de Camargo Guarnieri. *Per Musi* (UFMG), v. 27, p. 61-74: Belo Horizonte, 2013.

MORAES, P. M.; PITOMBEIRA, L. Composição de Obra Original a partir da Modelagem Sistêmica do Ponteio N.13 de Camargo Guarnieri. Congresso da ANPPOM, 21. **Anais...** Uberlândia, 2011. SCHENKER, Heinrich. *Free composition*. New York: Longman, 1935 / 1979.

MORAES, P. M.; PITOMBEIRA, L. Planejamento Composicional do Ponteio Nº 1 de Pedro Miguel a partir da Modelagem do Ponteio Nº 11 de Guarnieri. **Revista Música**, v. 13, p. 136-154, 2012.

MORAES, P. M.; PITOMBEIRA, Liduino. Composição do Ponteio Nº 5 de Pedro Miguel a partir da Modelagem Sistêmica do Ponteio Nº 15 de Camargo Guarnieri. **Música Hodie**, v. 13, p. 8-33, 2013.

NARMOUR, Eugene. **The analysis and cognition of melodic complexity**. Chicago: University of Chicago, 1992.

OLIVEIRA, H.; CODEÇO, A.; FERREIRA, A.; SANTOS, R.; PITOMBEIRA, L. Planejamento composicional de Tenere segundo princípios gestálticos. Congresso da ANPPOM, 27. **Anais...**Campinas: UNICAMP, 2017, p.1-10.

PITOMBEIRA, L. Formal Design, Textural Profile, and Degree of Harmonic Endogeny as modeling factors. **Anais...**, 2. Florianópolis: UDESC, 2017.

TYMOCZKO, Dmitri. **A Geometry of Music**: Harmony and Counterpoint in the Extended Common Practice. New York: Oxford University Press, 2011.

# Mathematical and Biological Representations in Derivative Analysis

Desirée Mayr

Universidade Federal do Rio de Janeiro – [djmayr@yahoo.com](mailto:djmayr@yahoo.com)

Carlos de Lemos Almada

Universidade Federal do Rio de Janeiro – [carlosalmada@musica.ufrj.br](mailto:carlosalmada@musica.ufrj.br)

**Abstract:** This paper aims at presenting the analytical model for derivative analyses (MDA) as it now stands, with the improvements that have recently been implemented. MDA essential purpose is to systematically analyze music which has been organically composed, according to the Schoenberg's principle of *Grundgestalt* and developing variation. This systematization is mainly accomplished through associations between musical events and mathematical formalization, geometrical representations and concepts derived from the fields of Evolutionary Biology and Genetics. In the final section of this paper, a practical application on Brahms's *Violin Sonata Op.78* is presented.

**Keywords:** Derivative Analysis. Mathematical Formalization. Organic Construction. Musical and Biological Variation.

## Representações Matemáticas e Biológicas em Análise Derivativa

**Resumo:** Este artigo tem como objetivo apresentar o modelo analítico para análise derivativa (MDA) em sua versão atual com os aperfeiçoamentos que foram recentemente implementados. O propósito essencial do MDA é analisar sistematicamente música organicamente composta, de acordo com os princípios schoenberguianos da *Grundgestalt* e variação progressiva. O processo de sistematização foi concretizado à partir de associações entre eventos musicais e formalização matemática, representações geométricas e conceitos derivados dos campos da Evolução Biológica e da Genética. Na parte final do artigo, uma aplicação prática na Sonata para Violino Op.78 de Brahms é apresentada.

**Palavras-chave:** Análise Derivativa. Formalização Matemática. Construção Orgânica. Variação Musical e Biológica.

## 1. Background

The Model of Derivative Analysis (MDA) is part of a research project initiated in 2011 and intended to produce systematic studies on musical variation under analytical, as well as compositional perspectives. Since then, several analyzes have been made, encompassing a varied group of organically-constructed works,<sup>1</sup> which resulted in considerable improvements to the research. This paper aims at presenting the MDA's current version, which has been consolidated with new basic assumptions, derived theoretical formulations, and a conceptual corpus constructed from these studies. Presently, MDA has achieved a high level of systematization (the very objective of the research), which became possible through a new, and consistent biological bias (more specifically, considering the areas of Genetics and Evolution Theory) and mathematical formalization of procedures and elements. This led to the

---

<sup>1</sup> ALMADA (2011a; 2011b; 2013a; 2013b; 2016), MAYR (2015) and MAYR & ALMADA (2016; 2017b).

creation of new terminology, symbology, and graphic analytical resources, whose main characteristics will be summarily exposed.

## **2. Basic overview**

The research is theoretically grounded on the principles of developing variation and *Grundgestalt*, elaborated by Arnold Schoenberg. In short, a *Grundgestalt* can be viewed as a primordial idea from which a whole composition can be obtained, through progressive transformation of its elements. These derivative processes are associated with the concept of developing variation, which differs from “ordinary”, non-consequential variation, by the fact that it gradually promotes divergent transformation from the basic material, producing new, though related ideas.<sup>2</sup>

Both principles arouse in Schoenberg’s mind as a consequence of an organic conception of the artistic creation, normally known as Organicism, a philosophical-scientific-artistic trend that influenced part of 19<sup>th</sup> century German composers, especially Beethoven, Brahms, as well as the young Schoenberg (MEYER, 1989; FREITAS, 2012; GRIMES, 2012). Music built according to organic terms can be basically defined as presenting a balance of forces associated with the apparently contradictory attributes of economy (or coherence) and variety and unfolds like the growth of a living being.<sup>3</sup>

MDA was conceived aiming at explaining the constructive processes that are employed for such development in pieces that present organic architecture. Its main focus is in the thematic structures that result from the application of developing variation techniques to the *Grundgestalt*’s basic components. One of the main drawbacks that an analysis of this sort faces is the difficulty of mapping accurately all the variations applied in a given segment of the piece, since normally this process is made with idiosyncratic derivative techniques, and not rarely involving combined transformations of musical parameters in different degrees. Even in the cases where the analyst is able to identify the adopted compositional strategy, a precise, objective, and concise explanation becomes normally a hard (if not impossible) task. This problem motivated the elaboration of MDA’s basic premise: that the derivative process can be decomposed into two distinct streams of musical information: pitch and

---

<sup>2</sup> For more about these principles, see, among others, DUDEQUE (2005, p. 135-172).

<sup>3</sup> This subject is more deeply examined in MAYR & ALMADA (2017a).



rhythm.<sup>4</sup> They are classified as *domains* in MDA, integrating an abstract plan of analysis, where processes of *developing variation of first order* (DV1) are performed.<sup>5</sup> This article is specifically intended to expose the processes and material considered for the abstract analysis.

### 3. Levels and Definitions

An MDA analysis of a given organically-constructed piece must be preceded by a very important phase, namely the localization and delimitation of the piece's *Grundgestalt* (in short, G). Already in this earlier stage, the analyst must be profoundly familiarized with the work in question, through many hearings of its recordings and a careful examination of the score. More precisely, one must pay special attention to the transformation of the musical materials along the piece and, gradually, be able to trace back their correlations to an eventual original source (which is, in most cases, located in the initial bars of the piece). Just after having done this, and, evidently, if one is successful in the task, the analyst is capable of properly identifying the referential unity (G) from which presumedly most of the piece's derivative relationships emanate, and further analytical interpretations will be produced.

A thematic derivative analysis of a multi-movement musical work in MDA is performed considering four levels:

- I. Intra-genetic – corresponds to: (a) identification and labeling of the potential abstract referential forms for further derivative processes, with corresponding attribution of permanent and/or temporary variables; (b) detection of eventual derivative relations between components (and subcomponents). This examination is exclusively employed in the (main) *Grundgestalt*;
- II. Inter-thematic – corresponds to: (a) explanation of the thematic construction based on derivative relations from the first-level referential forms; (b) determination of eventual correlations between the themes (and/or thematic fragments). In this approach, involving the content of isolated movements, the themes' formal functions and tonal contexts play an important role;
- III. Inter-movement (or inter-genetic) – corresponds to analysis on the formation of the second-order *Grundgestalten*, considering their possible derivation from the

---

<sup>4</sup> Other parameters can be considered as well, like tonal relations and metrics (see below).

<sup>5</sup> Conversely, there is also a developing variation of second order (DV2), associated to the concrete plan of transformations. For a limitation of focus and space, this plan will not be examined in this study.

elements present in the (main) *Grundgestalt* and eventual influences from themes of precedent movements. This approach is only applied to non-first movements;

- IV. Intra-work – corresponds to highest-level abstract analysis, considering two different investigations: (1) about tonal relations that may emanate from the *Grundgestalt* (from the seminal study by Carpenter, 1983); (2) about the existence of structural metric dissonance and, consequently, a metric *Grungestalt* (based on theoretical proposal by Ng, 2012).

The present article focuses on the first level and the procedures associated with it. Some preliminary definitions are necessary:

- 1 **Domain** – Is the musical attribute subject to be abstracted for variation purposes. This study considers two domains: pitch (p) and rhythm (r).<sup>6</sup>
- 2 **Sub-domain** – Are categories contained in a domain. There are three pitch sub-domains (ambit, intervallic sequence and melodic contour) and two rhythmic sub-domains (rhythmic sequence and metric contour). The sub-domains are formally described as algebraic vectors. Considering a given melodic fragment *F* (Example 1), its sub-domains can be presented as follows:
  - 2.1 **Ambit** (\*/*F*): is the intervallic distance between the first and last pitches. It is measured in semitones. Ex: <-5> (descending perfect fourth);
  - 2.2 **Interval sequence** (i/*F*): displays the ordered directions and intervallic contents that form the fragment. Ex: <-8+1+4-2>.
  - 2.3 **Melodic contour** (c/*F*): presents an abstracted version of the intervallic sequence, indicating only the directions and relative positions of the notes (the lower point is always labeled as “o” and the higher point is numbered as “n-1”, being n the number of onsets present in the fragment).<sup>7</sup> Ex: <2130>;
  - 2.4 **Rhythmic sequence** (r/*F*): expresses not the sequence of durations of the fragment, but its *inter-onset intervals*, or IOIs (TEMPERLEY, 2001), i.e., the distances between each note attack. In this way, the duration of the last note is not considered, just its point of attack (moreover, this fits the intuition that rests and ties can be considered relatively irrelevant for the

<sup>6</sup> Evidently, other domains could be considered, as harmony, timbre, texture, etc.

<sup>7</sup> For more detailed information about Contour Theory, see MORRIS (1987).

determination of rhythmic similarity). The IOIs are measured in sixteenth notes and separated by dots. Ex: r <4.2.2.4>;

- 2.5 Metric contour (m/F): like the melodic contour, indicates the relative metric strength of each note of the fragment, according to the metric context.<sup>8</sup>

**c <40132>**  
**i <-8+1+4-2>**  
**\* <-5>**

**r <4.2.2.4>**  
**m <31021>**

**Example 1:** Sub-domain labeling.

- 3 **Components** – are delimited segments considered for an analysis. In the case of the *Grundgestalt*, the components are labeled according to the formula: G.A, G.B, G.C, ... and may eventually be segmented into subcomponents (labeled with subscripts integers);
- 4 **Abstraction** – is a formal process employed for isolating a musical characteristic of a given melodic fragment, according to some domain/sub-domain.
- 5 **Second-order abstraction** – is the application of an abstraction-process to an already abstracted structure. The application of this process is indicated by a “2” exponent on the corresponding sub-domain to be recurrently abstracted. Ex:  $i<+2+1+1+2> \rightarrow i^2<(\text{ascending scale})>$ ;
- 6 **Operation** – is an algorithm applied to a given referential form in order to transform it onto a variant;
- 7 **Divergence** – is a special case of developing variation in which a derived form becomes an autonomous, divergent unity, initiating a new ramification of an existent lineage. Divergence can be analogously compared to the process by which a new species arouses from a referential life form through cumulative variations;

<sup>8</sup> This concept is explained in MAYR & ALMADA (2017a).

8 **Variables** – are used to describe forms that are derivatively relevant aiming to avoid long labels. There are two types of variables:

3.1 Permanent – attributed to those variants that influence derivative processes beyond the boundary of the movement where they are created. They are labeled with the final letters of the alphabet, in reverse order of occurrence, in upper case (Z, Y, X, ...);

3.2 Temporary – attributed to those variants that influence derivative processes only inside the movement where they are created. They are labeled with final letters of the alphabet, in reverse order of occurrence, italicized, and in lower case (z, y, x, ...).

#### 4. A Practical Application

In this section, the procedures that characterize the first-level MDA are presented as an example of application, considering a real case, the analysis of some *Grundgestalt*'s elements from the first movement of Brahms's *Violin Sonata Op.78*.<sup>9</sup>

The *Grundgestalt* (G) is presented by the violin in the first six bars of the piece, and is formed by five distinct components (G.A-G.E), as shown in Example 2.

The image shows a musical staff with a treble clef, a key signature of one sharp (F#), and a 2/4 time signature. The first six bars of music are shown. The first bar is marked 'G.A' and 'I'. The second bar is marked 'G.B' and 'I<sub>6</sub>'. The third bar is marked 'G.C' and 'IV'. The fourth bar is marked '(sequence)' and 'I'. The fifth bar is marked 'G.D' and 'V'. The sixth bar is marked 'G.E' and 'V<sub>6</sub>/V'. The components are enclosed in boxes, and the Roman numerals are written below the staff.

**Example 2:** Brahms – *Violin Sonata Op.78* (mm. 1-6).

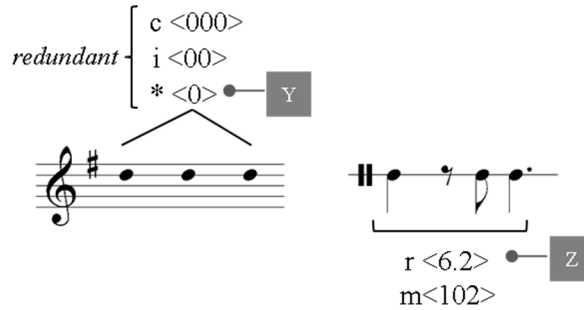
Each component represents a special, peculiar motivic characteristic with potential germinative power (albeit distinct disseminative capacities). In the next step of the analysis, the seven components are separately examined (some of them present subcomponents), in order to evidence their specific abstract properties. Considering the available limits of space in this paper, we will select just two of the five components (in this case, G.A and G.B) for demonstrating the application of the analytical method. Example 3 presents the segmentation of G.A.

The analysis of the components (and subcomponents, as well) take into account the respective five sub-domains abstractions (Example 4).

<sup>9</sup> This piece and Miguéz's *Violin Sonata Op.14* form the object of study of the research which is associated this paper.

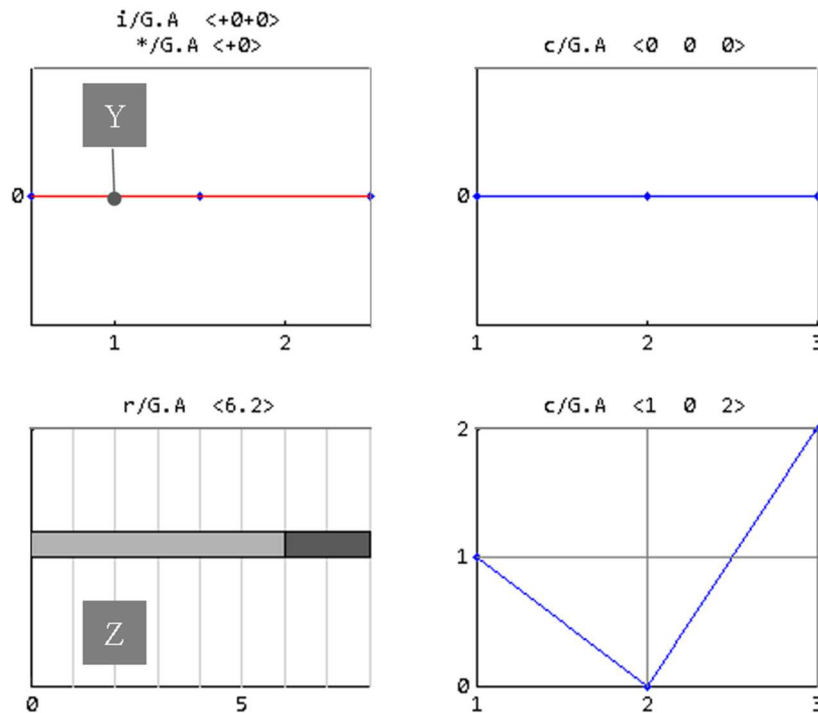


**Example 3:** Grundgestalt / component G.A.



**Example 4:** Abstractions of component G.A.

The first permanent variable (Z) is attributed to the sub-domain “r”, due to the almost omnipresence of this motivic unity along the work (considering the three movements). As it can also be observed in Example 4, the three pitch sub-domains (c, \*, i) present mutual redundancy. The ambit was selected as the domain’s representative, and is also labeled with a permanent variable (Y), considering its pervasiveness in the piece.

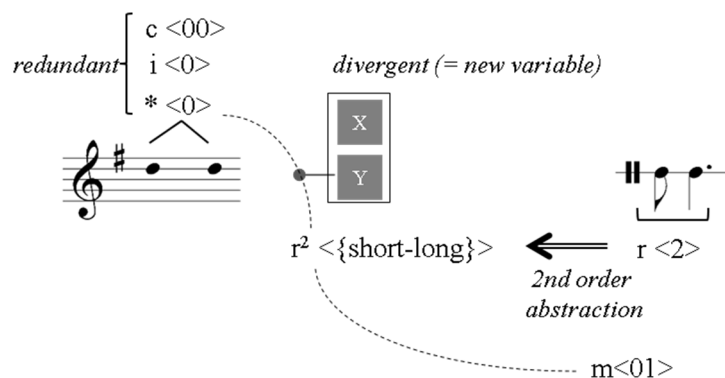


**Figure 1:** Graphic representation of abstracted characteristics of component G.A. Top left: intervallic sequence (blue line) / ambit (red line); top right: melodic contour; bottom left: IOIs; bottom right: metric contour. Variables associated to subdomains are properly identified.

An alternative view of the abstract characteristics of a given component is provided by a graphic representation. The main advantage of this method in comparison to the conventional musical notation is its neutral, systematic character. Figure 1 presents the group of G.A’s five abstractions, grouped in four plots.<sup>10</sup>

The two top graphs allow us to confirm the redundant character of the pitch material in G.A. The IOI graph (bottom left) represents, in horizontal bars, the distance between the onsets, considering sixteenth notes as unity of measurement. The last graph depicts the pattern of hierarchical metric fluctuations in the motive, as a contour (c.f. MAYR & ALMADA, 2017a).

Example 5 presents the abstract analysis of subcomponent G.A<sub>1</sub>.



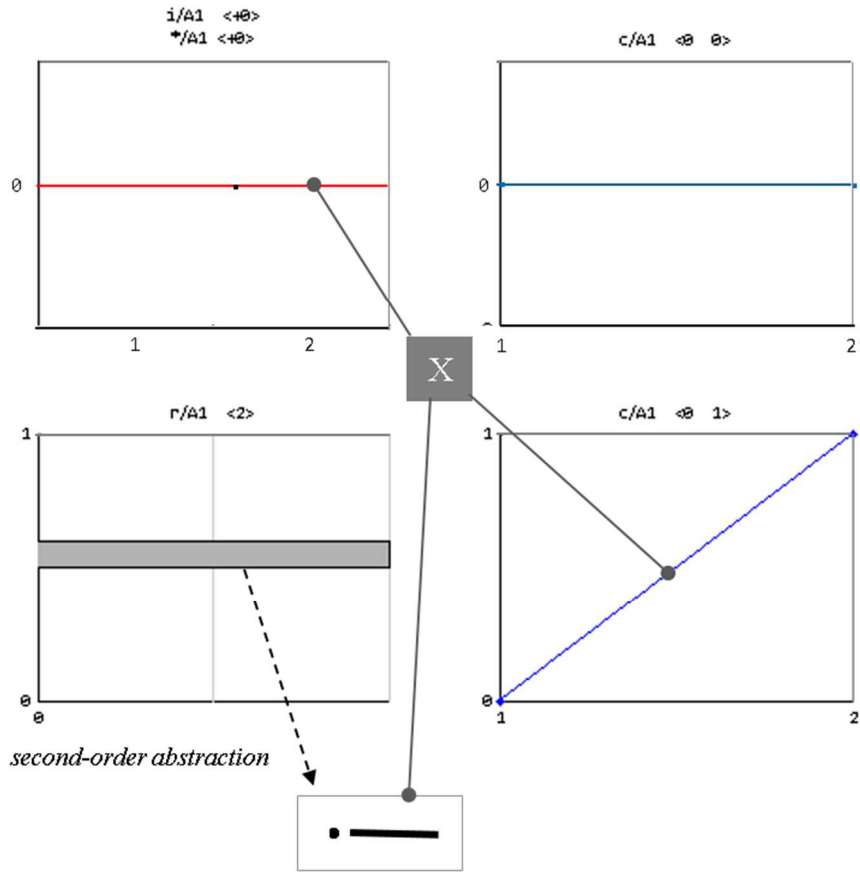
**Example 5:** Abstractions of subcomponent G.A<sub>1</sub>

A conjunction of three abstracted characteristics – pitch repetition (\* <0>) + metric profile “weak-strong” (m <01>) + second-order, abstracted rhythmic configuration (r<sup>2</sup> <{short-long}>) – can be viewed as a subset of Y (or, better, a special case of this). In the graphical representation of G.A<sub>1</sub> (Figure 2), we can observe from another perspective the triple origin of variable X. The second-order abstraction of the IOIs sequence is added below as a stereotypical graphic scheme representing the pattern “short-long”.

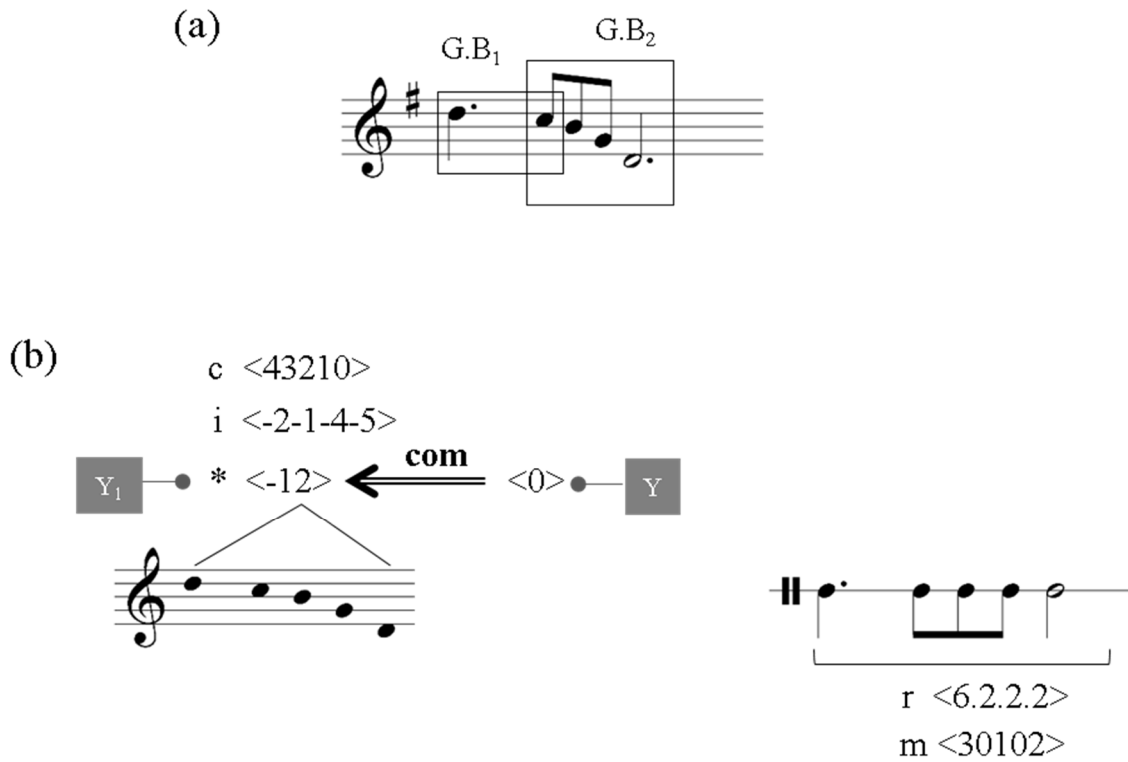
The segmentation and the analysis of the abstractions of component G.B are shown in Example 6. We observe in Example 6b the first case of abstract transformation: the application of an intervallic *complementation* (operation **com**)<sup>11</sup> to the unison <0> (Y) results in a descending octave <-12> (Y<sub>1</sub>). The graphic representation of G.B is shown in Figure 3

<sup>10</sup> Graphs plotted by the software MDA, implemented in Matlab.

<sup>11</sup> In the operation **com**, a given intervallic content is substituted by its complement.

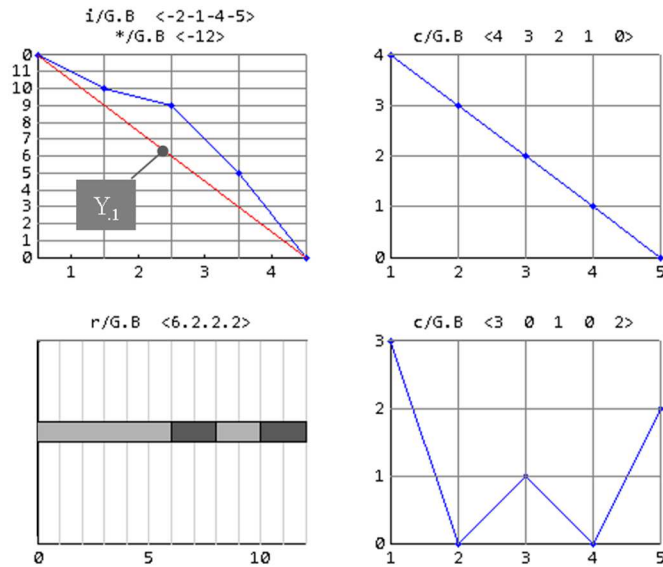


**Figure 2:** Graphic representation of abstracted characteristics of component G.A<sub>1</sub>.



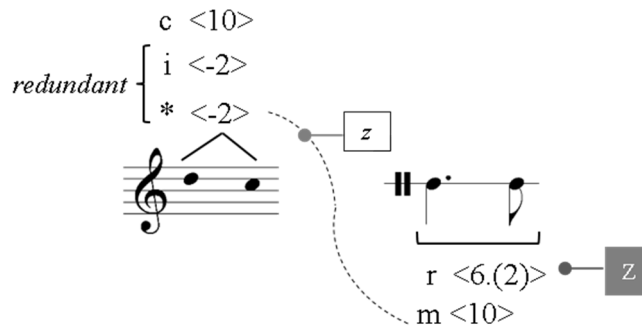
**Example 6:** Segmentation of component G.B (a); G.B's abstractions (b).

Like the previous cases, the same information can also be graphically represented (Figure 3).

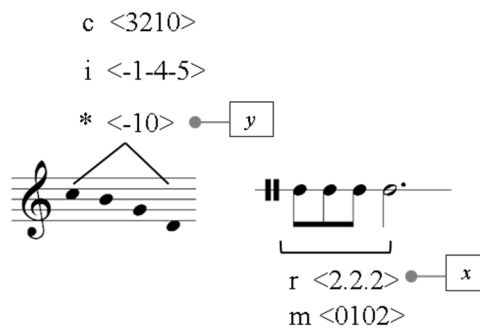


**Figure 3:** Graphic representation of abstracted characteristics of component G.B.

Examples 7 and 8 present the analysis of the abstractions that form subcomponents G.B<sub>1</sub> and G.B<sub>2</sub>, whose graphic representations are shown Figures 4 and 5.

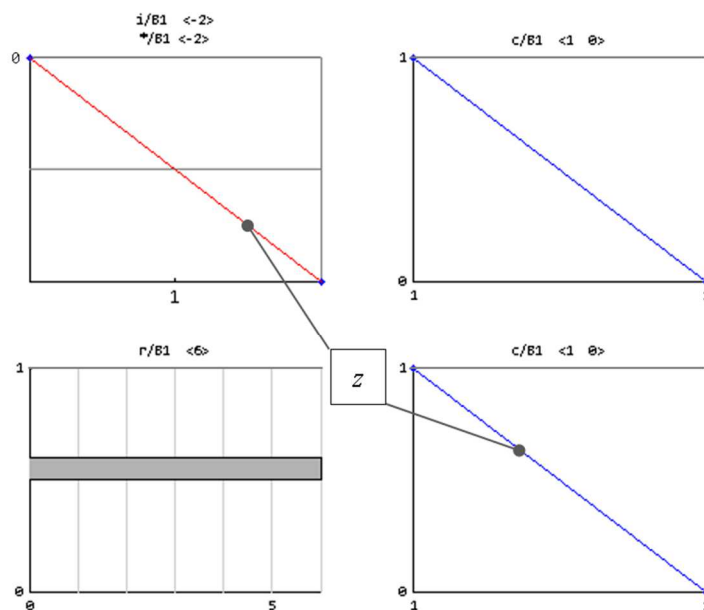


**Example 7:** Abstractions of subcomponent G.B<sub>1</sub>

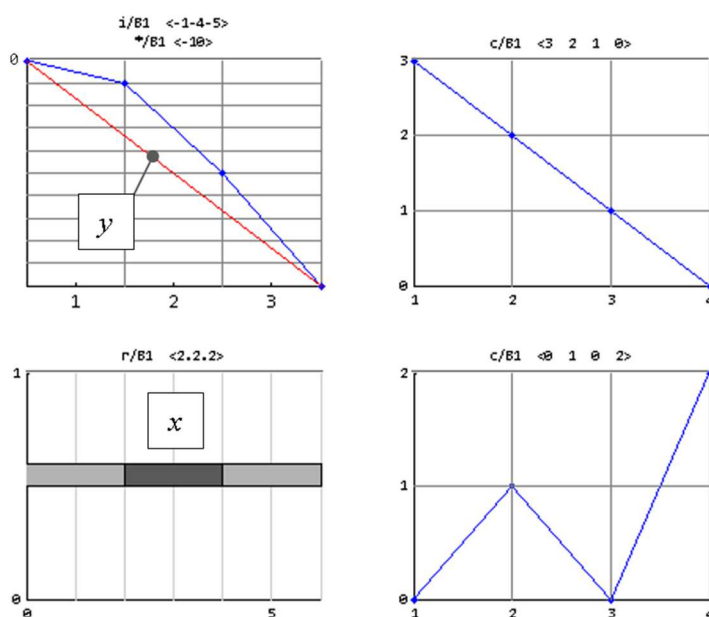


**Example 8:** Abstractions of subcomponent G.B<sub>2</sub>





**Figure 4:** Graphic representation of abstracted characteristics of component G.B<sub>1</sub>.



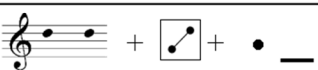

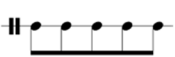


**Figure 5:** Graphic representation of abstracted characteristics of component G.B<sub>2</sub>.



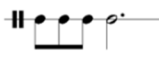





Tables 1 and 2 summarize the variables present in Op.78's *Grundgestalt* (including that referent to components G.C, G.D, and G.E, whose analyzes were omitted in this paper). The variables ultimately represent the referential abstract forms for MDA's second level, namely the inter-thematic analysis. The tables show three types of representation for the variables: formal (associated with their "genetic" origins), graphic (combining both musical and graphic descriptions of

components/subcomponents, resulting in a kind of hybrid, ideographic notation), and algebraic, as vectors.

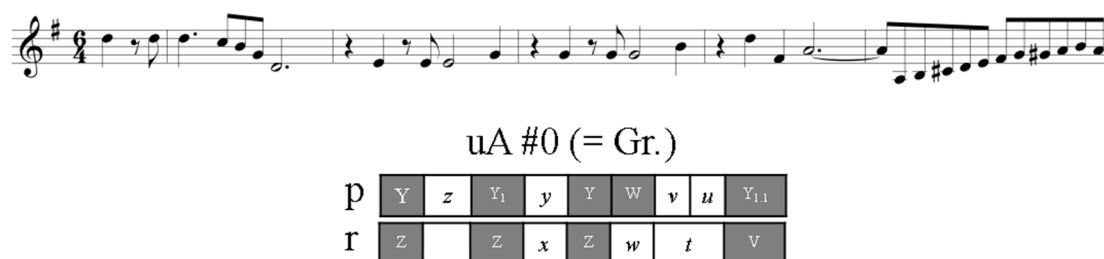
**Table 1:** Permanent variables.

| Variable | Formal representation                  | Graphic representation  | Vector representation   |
|----------|--|---|-------------------------|
| Z        | r/G.A                                  |  | <6.2>                   |
| Y        | */G.A                                  |  | <0>                     |
| X        | {* m r <sup>2</sup> }/G.A <sub>1</sub> |  | <0> <01> <{short-long}> |
| W        | */G.C <sub>2</sub>                     |  | <+3>                    |
| V        | */G.E <sub>1</sub>                     |  | <2.2.2.2>               |

**Table 2:** Temporary variables.

| Variable | Formal representation  | Graphic representation  | Vector representation |
|----------|------------------------|---|-----------------------|
| z        | {* m}/G.B <sub>1</sub> |  | <-2> <01>             |
| y        | */G.B <sub>2</sub>     |  | <-10>                 |
| x        | r/G.B <sub>2</sub>     |  | <2.2.2>               |
| w        | r/G.C <sub>2</sub>     |  | <8.(4)>               |
| v        | c/G.D                  |  | <201>                 |
| u        | */G.D                  |  | <-5>                  |
| t        | r/G.D                  |  | <4.4>                 |
| s        | c <sup>2</sup> /G.E    |  | <{asc.scale}>         |

With the definition of the variables as referential forms for the thematic construction, it is also possible to propose *genomic* representations for the unities of analysis, preparing the next analytical stage. The term “genomic” is employed in this context (reinforcing the metaphorical relations between music and biology of this approach) as a graphic representation in which musical notation is substituted by strings of variables (that act analogously to *genes*) organized according to the considered domains, pitch, and rhythm (our *chromosomes*). The genomic representation of the *Grundgestalt* (that can also be considered as a *unity of analysis* #0) is shown in Fig.6. As it can be observed, the graph depicts a high concentration of “genetic” information in a relatively short span of time: all of these “microscopic” unities, in greater or lesser extent, will play some role in the further organic process for producing the subsequent themes of the movement. Maintaining our “biomusic” terminological correspondence, it is also possible to consider the concrete, musical structures under analysis as *phenotypic-like* representations, since a phenotype can be shortly defined as the real expression of some group of genetic instructions.<sup>12</sup>



**Figure 6:** Phenotypic and genomic representations of Gr (unity of analysis #0).

### 5. Concluding Remarks

This study presented a number of innovations introduced in the current version of MDA, which can be subdivided into the following categories: (a) expansion of the original terminology and conceptual corpus; (b) mathematical formalization and vector descriptions of abstract elements; (c) use of concepts associated with biological/genetic phenomena; (d) graphic representations (of several types) as complementary information. As it was demonstrated, these innovations decisively contributed for the systematization of the analytical process (the primordial objective of the research), making it more precise and accurate.

<sup>12</sup> For more about this subject, see DAWKINS (2006).

## References:

ALMADA, Carlos. Derivative Analysis and Serial Music: the Theme of Schoenberg's *Orchestral Variations Op.31*. **Per Musi**, Belo Horizonte: UFMG, v.33, 2016, p.1-24, 2016, p.1-24.

ALMADA, Carlos. Considerações sobre a análise de *Grundgestalt*: aplicada à música popular. **Per Musi**, Belo Horizonte, n.29, 2013a, p. 117-124.

ALMADA, Carlos. Simbologia e hereditariedade na formação de uma *Grundgestalt*: a primeira das *Quatro Canções Op.2* de Berg. **Per Musi**, Belo Horizonte, n.27, 2013b, p. 75-88.

ALMADA, Carlos. Derivação temática a partir da *Grundgestalt* da *Sonata para Piano op.1*, de Alban Berg. In: ENCONTRO INTERNACIONAL DE TEORIA E ANÁLISE MUSICAL, (2.), São Paulo. **Anais ...** São Paulo: UNESP-USP-UNICAMP, 2011a, p. 1-11.

ALMADA, Carlos. A variação progressiva aplicada na geração de ideias temáticas. In: II SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE MUSICOLOGIA. **Anais ...** Rio de Janeiro: UFRJ, 2011b. p.79-90.

CARPENTER, Patricia. *Grundgestalt as tonal function*. **Music Theory Spectrum**, v. 5, 1983, p. 15-38.

DAWKINS, Richard. **The selfish gene** (3 ed.). Oxford: Oxford University Press, 2006.

DUDEQUE, Norton. **Music Theory and Analysis in the Writings of Arnold Schoenberg (1874-1951)**. Aldershot: Ashgate Publishings, 2005.

FREITAS, Sérgio. Da Música como Criatura Viva: repercussões do organicismo na teoria contemporânea. **Revista Científica / FAP**, Curitiba, v.9, p.64-82, jan-jun, 2012.

GRIMES, Nicole. The Schoenberg/Brahms Critical Tradition Considered. **Music Analysis**, 31/ii, 2012, p.127-132.

MAYR, Desirée. **Os processos criativos de Leopoldo Miguéz no primeiro movimento da Sonata para Violino op.14**. 2015. Dissertação (Mestrado em Música) – Centro de Letras e Artes, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015b.

MAYR, Desirée & ALMADA, Carlos. Geometrical and Vector Representation of Metrical Relations. In: CONGRESSO DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE TEORIA E ANÁLISE MUSICAL, 2, 2017. Florianópolis. **Anais ...** Florianópolis: UDESC, 2017a, p.10-19.

MAYR, Desirée & ALMADA, Carlos. Correlations between Developing Variation and Genetic Processes in the Analysis of Brahms' Violin Sonata Op.78. In: EUROPEAN CONGRESS OF MUSICAL ANALYSIS, 9, 2017, Estrasburgo. **Proceedings...** Strasburg: EUROMAC, 2017b (in press).

MAYR, Desirée & ALMADA, Carlos. Use of Linkage Technique in Johannes Brahms' Op.78 and Leopoldo Miguéz's Op.14 Violin Sonatas. *Opus*, v. 22, n. 2, 2016, p. 429-449.

MEYER, Leonard. **Style and music**. Chicago: The University of Chicago Press, 1989.

MORRIS, Robert. **Composition with pitch-classes**: A theory of compositional design. New Haven: Yale University Press, 1987.

NG, Yuet. **A Grundgestalt Interpretation of Metric Dissonance in the Music of Brahms**. Rochester, 2005. Tese (Doutorado em Filosofia). Eastman School of Music, University of Rochester, 2005.

TEMPERLEY, David. **The cognition of basic musical structures**. Cambridge: The MIT Press, 2001.

## **Domínio Sonoro: conceitos e aplicações na análise do III movimento do Op.11, de Webern**

André Codeço dos Santos  
Universidade Federal do Rio de Janeiro – andrecodeco@gmail.com

Liduíno Pitombeira  
Universidade Federal do Rio de Janeiro – pitombeira@yahoo.com

**Resumo:** O Domínio Sonoro, doravante DS, é uma superfície abstrata finita onde planejamento, desenvolvimento e análise de materiais musicais se constituem, essencialmente, a partir: 1) da perspectiva de Smolin (2013) acerca do Tempo<sup>1</sup>; 2) da criação e aplicação de modelos matemáticos descritivos, que estão sendo originalmente desenvolvidos na pesquisa na qual este artigo se insere; 3) da aplicação de conceitos fora do tempo e dentro do tempo de Xenakis (1990); e 4) do Pensamento Sincrético (HALAC, 2013). O presente artigo tem como objetivo apresentar os conceitos e seus respectivos modelos matemáticos e expor a análise do III movimento do Op.11 de Webern, a partir das ferramentas analíticas do DS.

**Palavras-chave:** Domínio Sonoro. Análise Musical. Teoria de Música. Composição Musical. Música e Matemática.

**Title of the Paper in English: Sonic Domain: Concepts and Application in the Analysis of III Movement of Op.11, by Webern.**

**Abstract:** The Sonic Domain is a finite abstract surface that holds entities both out of time and in time (Xenakis 1990), where planning, development and analysis of musical materials essentially consists of a certain perspective about time / space in music. The present article aims to: 1) present the concepts and their mathematical models that describe the behavior of the events in the ordered phase of the surface; and, 2) to expose the analysis of the Webern's Op.11, III movement, taking the Sonic Domain approach.

**Keywords:** Sonic Domain. Musical Analysis, Music Theory. Composition. Music and Math.

### **1. Introdução:**

Questão recorrente e complexa ao longo do desenvolvimento do pensamento filosófico, é estabelecer conceito para o tempo. Em 2013, o físico americano Lee Smolin e o filósofo brasileiro Roberto Mangabeira Unger<sup>2</sup>, ofereceram uma abordagem contrária e promulgam que apenas uma mudança pragmática poderia dar saída para as pesquisas em Física e Cosmologia quânticas. Em suma, de acordo com os autores: o tempo é real e não emergente do espaço (não contrariando o

---

<sup>1</sup> Em seu livro *Time Reborn* (2013), Smolin adentra em uma das discussões mais duras em Física: a existência ou não do Tempo. Dentre outras afirmações, Smolin postula que o Tempo é real, ou seja, o Tempo não é uma abstração. Porém, apenas um recorte dele é acessível através de modelos matemáticos. Desta forma, o limite da linguagem matemática coincide com o limite humano de manipulação do Tempo. Apoiando-se nesta abordagem, no âmbito do DS, seja o tempo da partitura, da performance e inclusive o da experiência musical, são recortes do Tempo real. A estes recortes de tempo esboçados na partitura, o chamamos de tempo sonoro e lançamos os modelos matemáticos do DS.

<sup>2</sup> As ideias de Lee Smolin e Roberto Mangabeira estão expostas em dois livros: *Time Reborn* (2013) e *The Singular Universe and the Reality of Time* (2015). Os conceitos serão pormenorizados na seção 1.3, no capítulo I.

entrelaçamento tempo-espaço) o que equivale dizer que o universo é finito, o tempo se faz real no momento presente, que representa a sucessão vertical e horizontal de momentos compartilhados por todas as coisas que existem, e, por fim, não existem modelos matemáticos que encapsulem o tempo real. As implicações operacionais para a Física são profundas e inúmeras, no entanto, esses três principais argumentos tangenciam a prática musical.

Estendendo o questionamento filosófico sobre o tempo ao contexto musical (se é que é possível separar planos de experiência), é possível dizer que existe tempo em música? Se sim, o que é e qual é o tempo em música? E quais relações entre e espaço? Por certo, essas são questões complexas e demandam profundas análises em campos distintos da prática musical. No entanto, Xenakis, em seu livro *Formalized Music* (1990), oferece uma compreensão acerca do tempo em música que é fundamental para o presente trabalho, dissolvendo todo elemento musical em dois estados<sup>3</sup>: *fora do tempo* e *dentro do tempo*. Fica evidente que esses dois estados encerram o tempo musical como dependente do espaço, como que emergido dele, pois nesse sentido, o tempo só pode ser acessado a partir da atribuição de certos parâmetros aos elementos.

A partir da delimitação do referencial teórico-filosófico geral e o debate dos argumentos envolvidos, a pesquisa onde se insere o presente trabalho se apropria dos conceitos de Smolin (2013) e Xenakis (1990) e expõe uma teoria original acerca do tempo e espaço em música. A chamamos de teoria do DS, que na verdade, é fruto da confluência de outras teorias.

Nesse sentido, não só o tempo e espaço musicais são alvos das investigações conduzidas. Atingem também o centro da discussão, processos de estruturação composicional e, conseqüentemente, o desenvolvimento de ferramentas analíticas e composicionais.

Os protocolos composicionais de Xenakis (1990) e o Pensamento Sincrético (HALAC, 2013), são duas aplicações que se tangenciam no que se refere a procedimentos composicionais, e são empregadas a teoria do DS. Enquanto Xenakis (1990) apresenta oito passos protocolares (*concepções iniciais, definição das entidades sonoras, definição das transformações, microcomposição, programação*

---

<sup>3</sup> Na verdade, Xenakis elenca três estados: atemporal, fora do tempo e dentro do tempo. No entanto, o enfoque maior tanto no livro de Xenakis quanto no presente trabalho, fica sobre os dois estados citados no texto.

*sequencial, implementação, resultado simbólico final e realização sonora*)<sup>4</sup>, Halac parece os condensar em apenas três (*potencial expressivo compositivo, vetor interativo sincrético e interação*). Resumidamente, ambas promovem: a comunicação entre ideia e materialização, representação mental e realização musical; processos de desenvolvimento do material em si; e, desenvolvimento da narrativa musical. Portanto, a teoria do DS é também produto da confluência das duas abordagens nas perspectivas do processamento composicional e da análise musical.

A teoria do DS é totalizada a partir da proposta de modelos matemáticos descritivos e representada por uma superfície finita abstrata, dividida em duas fases distintas (não ordenada e ordenada), que condensa todas as concepções envolvidas na teoria. Nesse sentido, surgem conceitos originais ligados aos modelos matemáticos que são visíveis por meio de gráficos e outras manipulações visuais. A interlocução entre os gráficos/gestos provenientes da topologia da superfície abstrata e a partitura, se dará por intermédio de análises de obras de formação e estéticas distintas<sup>5</sup>

No presente artigo, no entanto, apenas as ferramentas matemáticas serão apresentadas, expondo através deles conceitos fundamentais à Teoria.

## **2. A Topologia do DS e seus modelos matemáticos:**

Todas as operações na teoria do DS, são realizadas sobre uma superfície finita e abstrata, que é dividida em fases ordenada e não ordenada, separadas por uma função ordenadora (Figura 1). Na verdade, dá-se a essa superfície o nome de DS. Contudo, a fim de evitar confusão normativa, nesta seção a superfície finita abstrata será chamada apenas de superfície.

As instâncias organizacionais do Pensamento Sincrético, o conceito de eventos fora do tempo e dentro do tempo (Xenakis, 1990) e a própria formulação a cerca do tempo no DS, permeiam todas as fases da superfície.

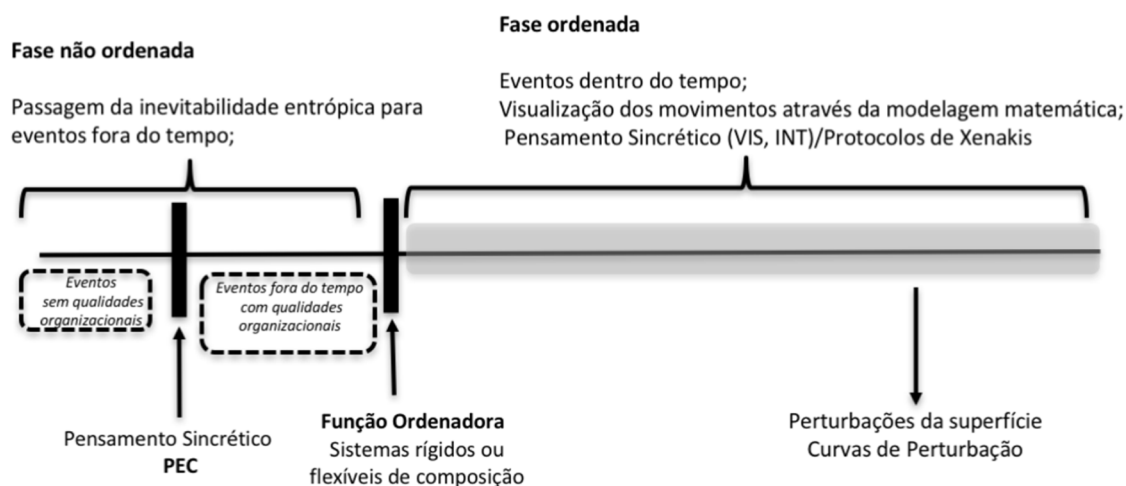
No entanto, a fase ordenada da superfície será a única abordada no presente artigo, pois é sobre ela que são aplicados os modelos matemáticos atuando como ferramentas analíticas.

---

<sup>4</sup> “Initial conceptions, definition of the sonic entities, definition of the transformations, microcomposition, sequential programming, implementation of calculations, final symbolic result and sonic realization.” (XENAKIS, 1990, p. 22). Tradução nossa.

<sup>5</sup> No sentido composicional, as ferramentas do DS podem ser aplicadas em modelagem sistêmica, em aplicação livre e em sistemas abertos como, por exemplo, o software OpenMusic.





**Figura 1:** Demonstração das fases da superfície do DS

A conversão dos movimentos da fase ordenada da superfície em dados visuais, ocorre ao abordar os elementos como eventos, os quais são entendidos como unidades de medida equidistantes que se apresentam de maneira variada no tempo. A modelagem matemática parte dessa variação, propiciando a visualização dos eventos na superfície por meio dos gráficos. As variações temporais dos eventos conferem níveis de perturbação ao espaço.

O conceito de perturbação exerce papel fundamental nos processos analíticos do DS. Na fase ordenada da superfície da superfície os eventos atuam dentro do tempo, ou seja, de maneira ordenada. As interações que promovem a ordenação, conferem velocidade aos eventos, isto é, o quanto da superfície eles percorrem em função do tempo. Nesse sentido, as perturbações representam as variações temporais do espaço metrificado (eventos), a mudança de velocidade entre os eventos envolvidos. Portanto, a quantidade de perturbação sofrida pela superfície está ligada à dissemelhança das temporalidades dos eventos envolvidos, e não propriamente com a rapidez com que eventos temporalmente semelhantes se movem (Figura 2).

-      Grau de perturbação      +

Piano

Violoncell\*

Klavier

**Figura 2:** Exemplo de graus de perturbação considerando apenas durações. No excerto da esquerda, o *Prelúdio I*, de Bach como exemplo de superfície pouco perturbada por conta da semelhança entre as durações. No excerto da direita, *Op. 11*, de Webern, I mov., com maior grau de perturbação por conta da dissemelhança entre as durações.

As perturbações são percebidas em níveis distintos, denominados curvas de perturbação: *índices de perturbação*, *velocidade de perturbação*, *fator de perturbação*, *ponto de distorção* e *curva intervalar*. No intuito de visualizá-las e descrevê-las, são aplicados os modelos matemáticos da teoria do DS. Portanto, os modelos matemáticos propostos no presente trabalho, pretendem descrever o comportamento dos elementos na fase ordenada bidimensional ou tridimensional da superfície que e fornecer meios de visualizá-lo.

Os modelos matemáticos se baseiam em dados extraídos unicamente da partitura e em relação a ela criam gráficos abstratos. Não está implícito que a partitura seja figurada em alto nível de concretude no contexto musical geral, mas que, por exibirem dados exclusivamente musicais, ela se encontra mais próxima ao nível concreto em relação aos gráficos. (Figura 3)



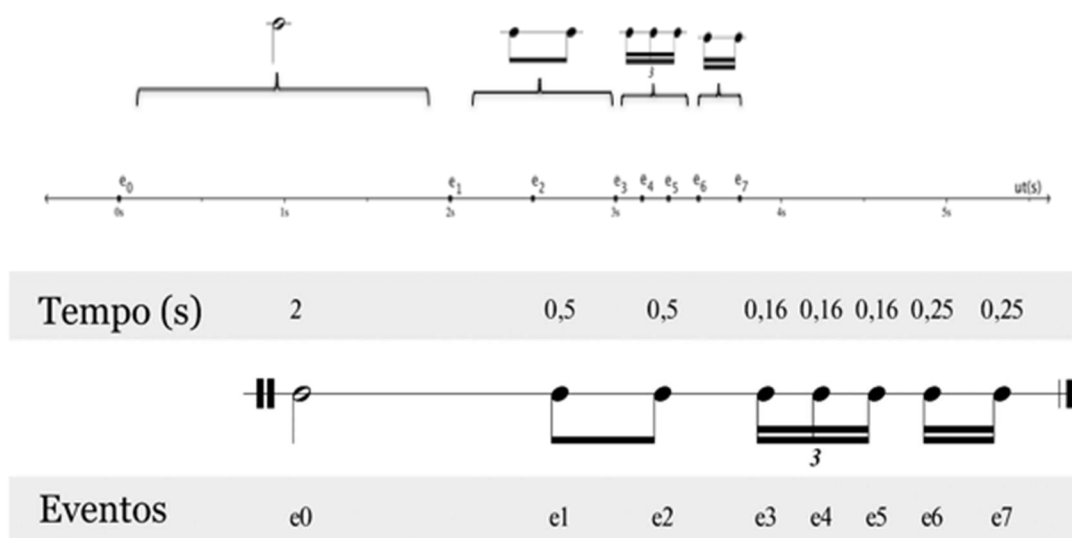
**Figura 3:** Relação de abstração entre os gráficos e a partitura.

A temporalidade objetivada pelo DS, resulta da relação biunívoca entre eventos equidistantes e seus acontecimentos no tempo. Nesse âmbito específico, os eventos, entendidos como unidades de distância, podem ser associados a gestos, contornos, figuras rítmicas, dinâmicas etc. Isto é, uma vez determinado o evento e a ele agregado qualidade simétrica espacial, este torna-se uma unidade de distância (CARNAP, 1995)<sup>6</sup>. Nesse sentido, os eventos são unidades de medição da superfície ordenada do DS (Figura 4).

O que se propõe a seguir, é que a partir de dados coletados da partitura, seja criado um gráfico bidimensional. Plota-se no eixo  $y$  os eventos, ou seja, unidades de distância ( $ud(e)$ ) da superfície, e no eixo  $x$ , o fluxo temporal medido em segundos ( $ut(s)$ , relacionado à unidade de tempo), que mapeie o comportamento dos eventos através de modelos matemáticas. O conceito de *Curvas de Perturbação*<sup>7</sup> surge a partir da validação dos modelos matemáticos e se dá em níveis.

<sup>6</sup> De acordo com Carnap, distâncias são mensuráveis a partir de um esquema triplo de leis. A primeira lei define igualdade, a segunda lei define adição e a terceira define unidade. Para maiores informações, ver CARNAP, 1995. Capítulos VII “*Extensive Magnitudes*” e VIII “*Lengths*”.

<sup>7</sup> Em Matemática, o conceito de curva está ligado a qualquer linha, não se limitando a curva no sentido estrito da palavra. Pode, por exemplo, representar uma reta. Todos os níveis das curvas de perturbação descritos no presente artigo, são concepções originais do presente autor.



**Figura 4:** Representação de figuras de notas como eventos em um eixo temporal unidimensional. Representação dos eventos como unidades de distância.

#### Índices de Perturbação:

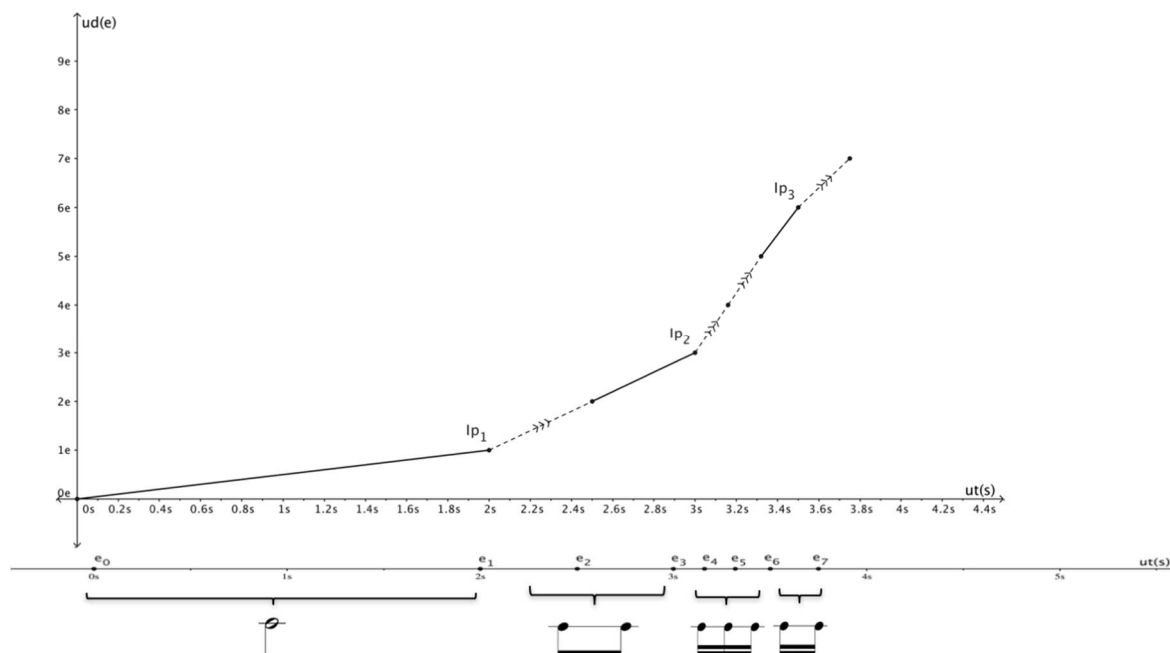
São os pontos que representam mudanças de coeficiente angular entre as retas obtidas a partir da relação evento ( $ud(e)$ ) x tempo ( $ut(s)$ ), ou seja, a partir dos pontos de ataque (Figura 5). Os índices de perturbação são obtidos tomando-os um a um, de maneira subsequente, até que seja revelado a mudança de coeficiente angular. Propomos o seguinte modelo matemático (Equação 1).

$$Ip: \text{ se, } m(r_n) > m(r_{n+1}) \text{ ou, } m(r_n) < m(r_{n+1}), | \phi = \tan^{-1} m$$

**Equação 1:** Índice de Perturbação, onde  $m$  simboliza o coeficiente angular da reta  $r_n$ .

Estes dados revelam que uma sucessão de eventos que acumulem a mesma quantidade de duração temporal, não oferece variação de índices de perturbação na superfície ordenada do DS. Por outro lado, dois ou mais eventos com durações diferentes revelarão número maior de índices. Essa constatação apresenta a perspectiva do DS acerca do tempo e espaço em música. Ou seja, na porção de superfície ordenada do DS, os índices de perturbação estão ligados à taxa de variação da relação evento/tempo<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> Pode-se obter um gráfico com índices de perturbação considerando progressões harmônicas como eventos, por exemplo. Pode-se ainda obter um gráfico que considere dois parâmetros simultâneos. Por exemplo, harmonia e pontos de ataque.



**Figura 5:** Representação gráfica dos Índices de Perturbação

*Velocidade de Perturbação:*

Ao plotarmos os pontos no gráfico bidimensional, surgem funções de primeiro grau, retas que contém os índices de perturbação. Derivando a função da posição de cada evento, surgem pontos que representam mudanças de velocidade entre cada trecho da trajetória (Figura 6). Propomos o seguinte modelo matemático que indique a velocidade da perturbação (Equação 2).

$$Vp: \frac{dy}{dx} = f'(x_n)$$

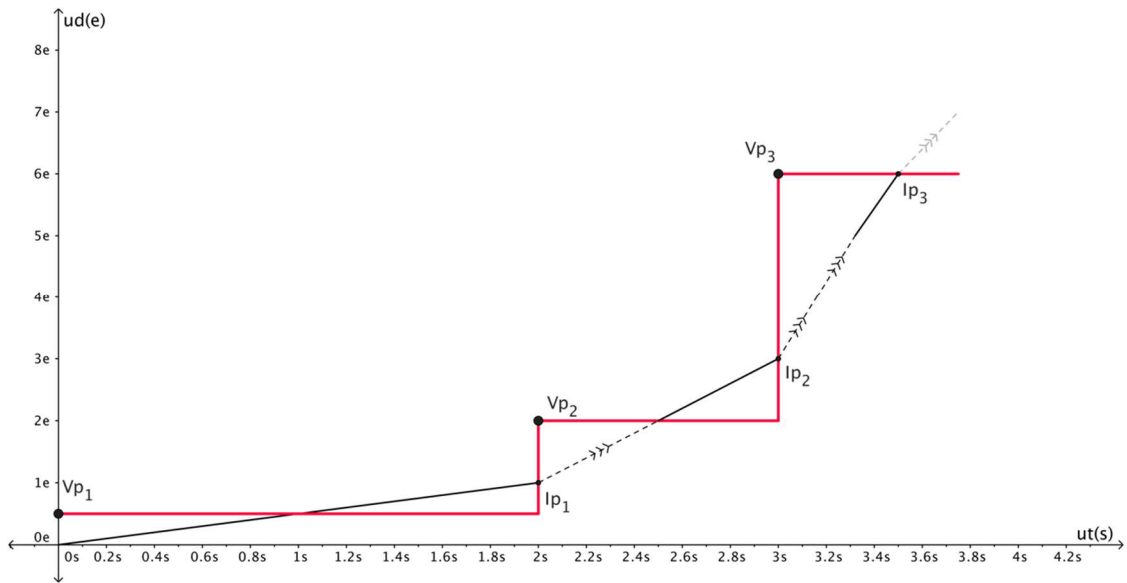
**Equação 2:** Velocidade de Perturbação, onde  $x_n$  representa a função que descreve a trajetória entre os pontos  $Ip_n$  e  $Ip_{n+1}$ .

É a área sob curva que passa pelos pontos da velocidade de perturbação. Através da interpolação polinomial<sup>9</sup>, obtém-se uma das funções que descrevem a curva<sup>10</sup> e utilizando a fórmula da integral definida, um número real será revelado. No âmbito do DS, impomos ao fator de perturbação o status de grandeza escalar, assim, o valor obtido revelará a perturbação da superfície em dois sentidos: o grau de similaridade e a variação entre as perturbações (Figura 7). Assim, o fator de

<sup>9</sup> Pode-se obter a curva através de aplicativos computacionais. A fórmula aplicada é:  $f [ x_i , \dots , x_{i+k} ] = ( f [ x_{i+1}, \dots , x_{i+k} ] - f [ x_i, \dots , x_{i+k-1} ] ) / ( x_{i+k} - x_i )$

<sup>10</sup> Existem uma família de funções que passam por estes pontos. No âmbito do DS, a função será revelada pela interpolação polinomial.

perturbação representa o maior nível de abstração em relação a partitura. Propomos o seguinte modelo matemático para a verificação do fator de perturbação (Equação 3).

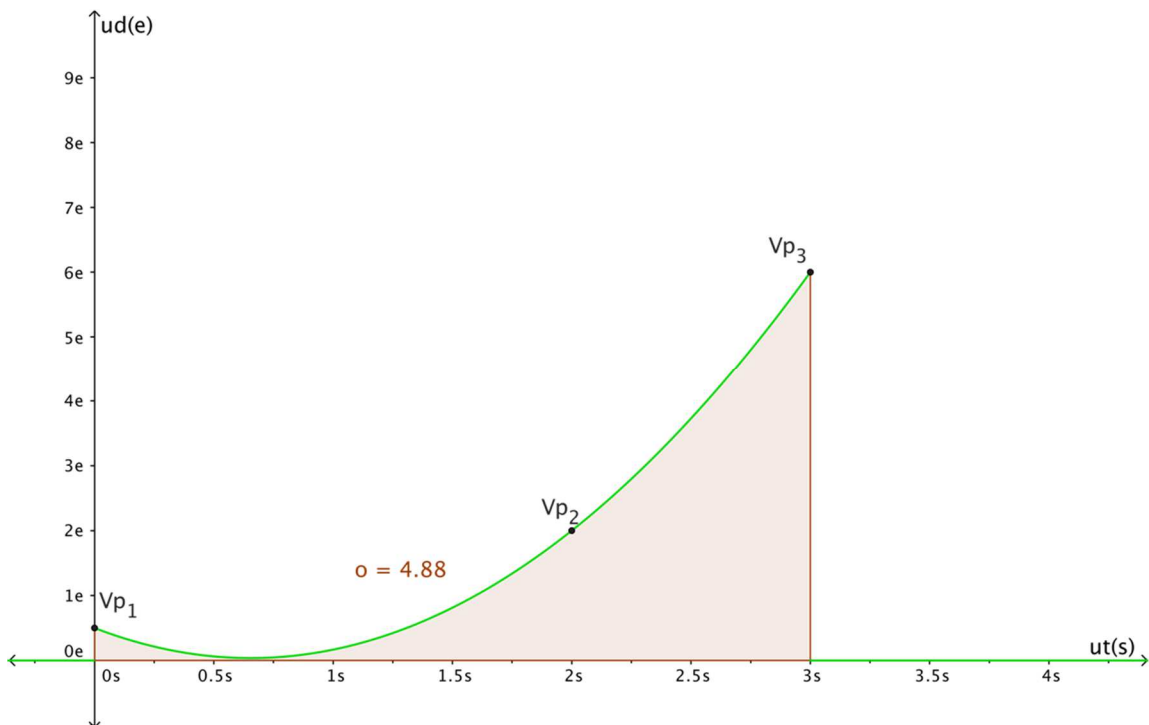


**Figura 6:** Representação gráfica das Velocidades de Perturbação.

*Fator de Perturbação:*

$$kp = \int_a^b F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(xi) \Delta x$$

**Equação 3:** Fator de Perturbação.



**Figura 7:** Representação gráfica do fator de perturbação.

*Pontos de distorção e Densidade Dinâmica:*

Decorre da leitura vertical dos eventos, relacionando as alturas envolvidas. Isto é, são os pontos no tempo onde ocorrem superposição de alturas<sup>11</sup> (acordes, massas sonoras). No âmbito do DS, a verticalidade representa o congelamento do fluxo temporal, e neste momento é levado em conta o produto das relações entre alturas e dinâmicas. São atribuídas às alturas qualidades de massa e volume. Em Física, massa é uma grandeza escalar que está relacionada com a unidade de medida quilograma. No caso do DS, adotou-se a nomenclatura *massa sonora* ( $m_s$ ) com notas como unidade de medida. Ou seja, a massa sonora é a densidade-número (BERRY, 1976). Comumente, a grandeza escalar volume está associada a unidade metro em três dimensões. No âmbito do DS, adotou-se a nomenclatura *volume sonoro* ( $v_s$ ), com intervalos como unidade de medida unidimensional. Assim, o volume sonoro representa o número de semitons compreendidos entre o intervalo. A razão  $m_s/v_s$  consiste no que Berry (1976) conceituou como densidade-compressão. Além destas grandezas, é atribuído às dinâmicas um coeficiente de intensidade ( $\mu_i$ ) relacionado a uma escala de valoração<sup>12</sup> (Tabela 1):

**Tabela 1:** Escala de valoração para ( $\mu_i$ )

| <i>ppp</i> | <i>pp</i>   | <i>p</i>       | <i>mp</i>      | <i>mf</i>      | <i>f</i>       | <i>ff</i>  | <i>fff</i>  |
|------------|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|------------|-------------|
| 0.0 – 15.8 | 15.8 - 31.7 | 31.7 –<br>47.6 | 47.6 –<br>63.5 | 63.5 –<br>77.3 | 77.3 –<br>92.2 | 92.2–111.1 | 111.1 - 127 |

A partir do conhecimento destes valores, é proposto o conceito de *densidade dinâmica* ( $Dd$ ) através do seguinte modelo matemático (Equação 4).

$$\frac{m_s}{v_s} \mu_i = Dd$$

**Equação 4:** Densidade dinâmica

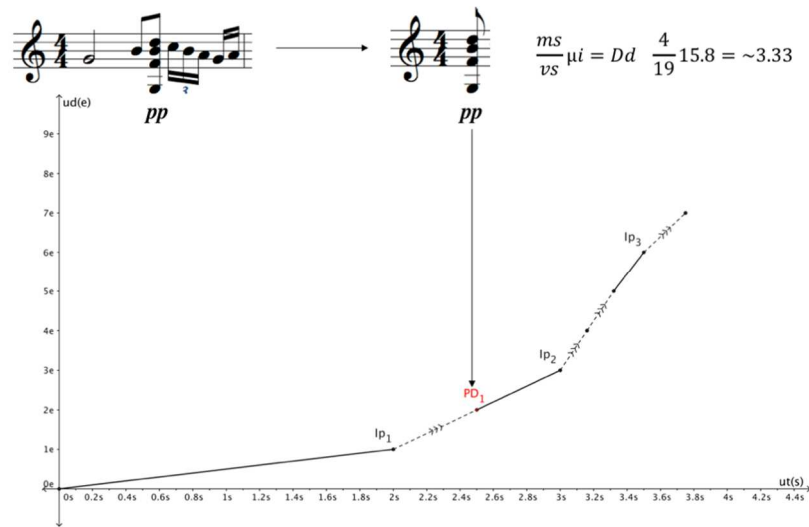
O valor obtido pode ser plotado no eixo z e, neste sentido, os pontos de distorção, dotados de densidade dinâmica são responsáveis pela tridimensionalidade da superfície<sup>13</sup>. Contudo, sua ocorrência em duas dimensões fica melhor encapsulada

<sup>11</sup> No presente trabalho as alturas são consideradas apenas no caso de blocos ou acordes.

<sup>12</sup> Esta escala de valoração toma como referência os valores dos protocolos MIDI para medição da intensidade das notas.

<sup>13</sup> Uma opção para apresentação do gráfico tridimensional que tem boa aceitação é realizada por animações ou filmes. Um repositório de animações, filmes e gráficos conceituais relativos a teoria do DS, estão em fase de criação e serão hospedados em [www.andrecodeco.com](http://www.andrecodeco.com).

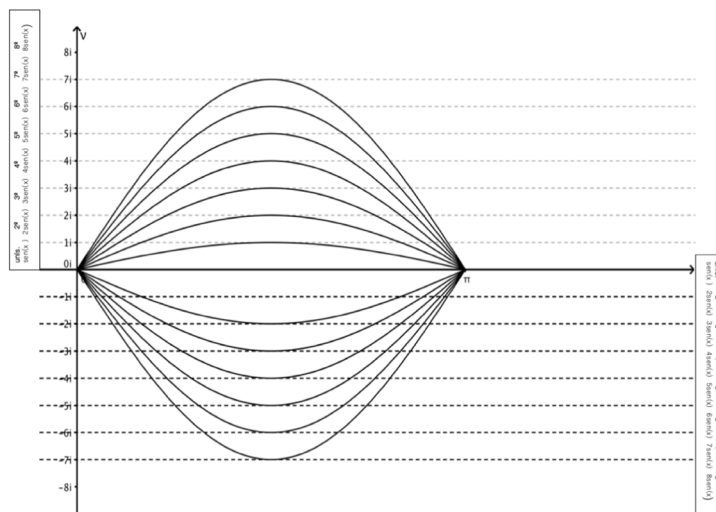
(Figura 8).



**Figura 8:** Representação gráfica dos pontos de distorção em duas dimensões.

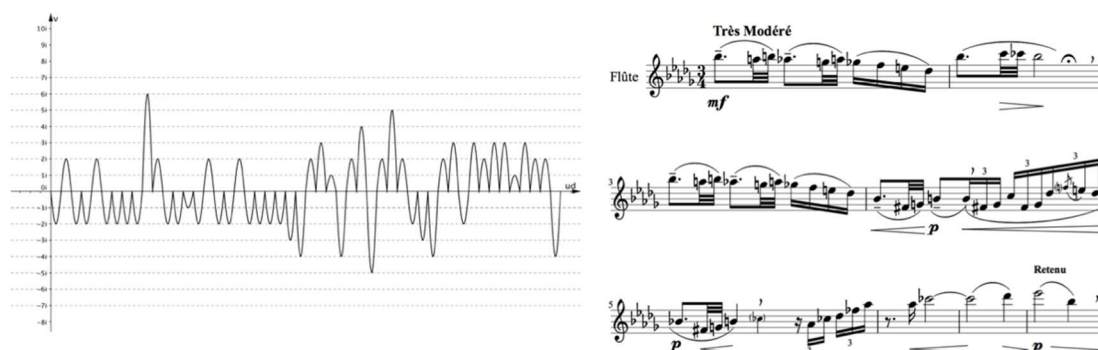
*Curva Intervalar*

Apresenta o caminho intervalar empregado, atribuindo funções seno específicas a respectivos intervalos. Os intervalos são apreendidos de maneira ascendente e descendente, contudo sem o refinamento qualitativo (categoria maior, menor, aumentado ou diminuto) (Figura 9). Sua representação é bidimensional, plotando no eixo y os intervalos (operando em Mod.12) e, no eixo x são plotados os eventos representados por períodos  $\pi$ <sup>14</sup>. O objetivo é fornecer informação do fluxo horizontal das alturas, já que os pontos de distorção surgem da qualidade vertical (Figura 10).



**Figura 9:** Representação gráfica da curva intervalar

<sup>14</sup> Sem a transformação através manipulação do argumento, toda função seno terá período  $\pi$ .



**Figura 10:** Curvas intervalares dos primeiros oito compassos de *Syrinx*, de Debussy.

## 2. Análise

Antes de iniciar propriamente a análise, e antevendo, digamos, uma postura conclusiva (o que não concorre para um bom fluir textual analítico), os gráficos a seguir apresentam dados que a princípio atingem níveis inacessíveis. Contudo, sua confecção está em constante aprimoramento e até mesmo aplicativos computacionais tem sido desenvolvidos na pesquisa onde o presente artigo se insere.

Dito isto, o *Op.11* é escrito para violoncelo e piano, e é composto de três movimentos, a saber: I - Mäßige Achtel, II - Sehr Bewegt e III - Äusserst Ruhig. O terceiro movimento tem apenas 10 compassos, e dura aproximadamente 50 segundos. O controle consciente, sobretudo das alturas, por Webern é notório em diversas análises publicadas<sup>15</sup>. Portanto, em nossa análise procuraremos mostrar características da obra do ponto de vista do DS, colocando em suspensão, a princípio, classes de conjuntos de alturas.

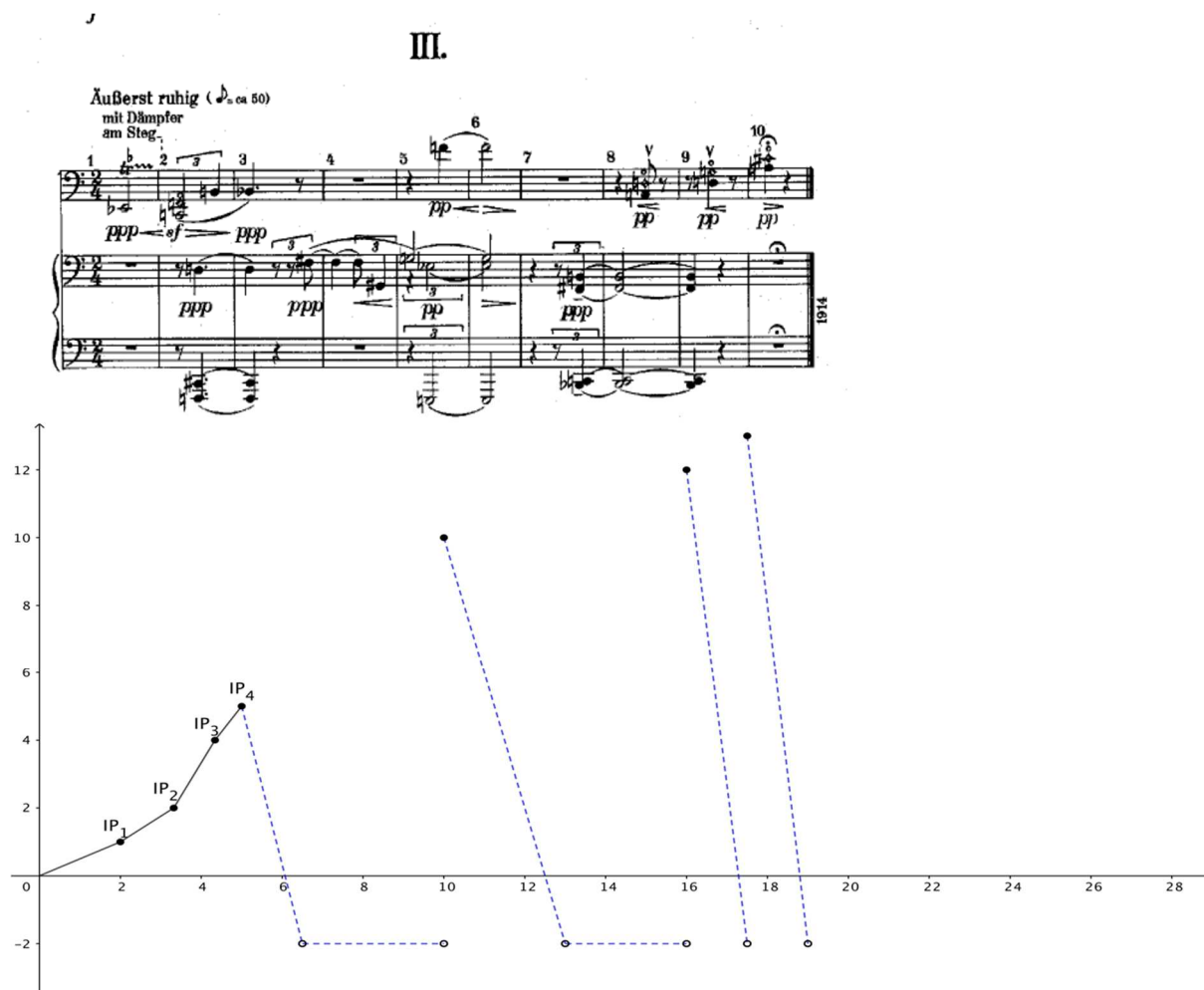
Optamos, por razões de clareza gráfica e até mesmo de entendimento textural a partir dos conceitos do DS, por analisar separadamente as partes do piano e do violoncelo. Optamos também por não revelar cálculos como a interpolação polinomial, as integrais e derivadas. Pois estes já estão descritos nos modelos acima e nossa intenção é que o leitor tenha contato com os resultados e seus significados, por ora.

Tomando primeiramente o violoncelo, quatro índices de perturbação são expostos (c. 1-3) (Figura 11). Como a diferença dos ângulos entre as retas é pequena, fica claro que a dissemelhança entre as notas que compõem os índices é mínima. Ainda assim, a maior diferença está entre os  $Ip_2$  e  $Ip_3$  (maior discrepância entre coeficientes angulares). Os pontos opacos abaixo do eixo x e na parta negativa do eixo y,

<sup>15</sup> Ver SHAFER 2009, WINTLE 1975, EWELL, 2013.



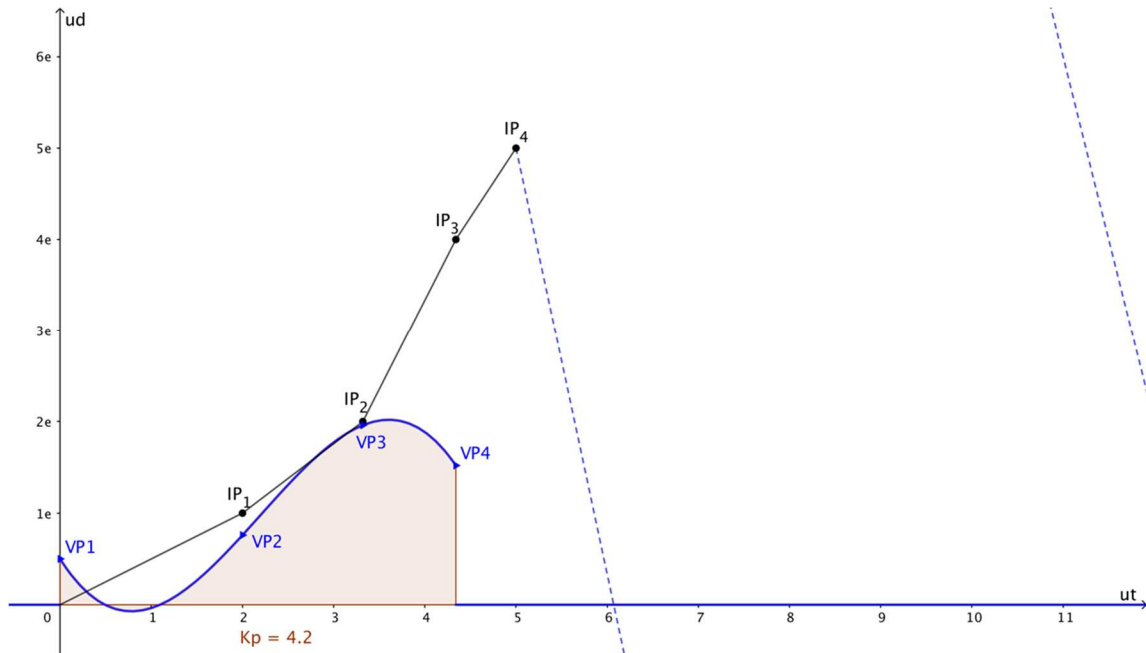
representam as pausas e as retas pontilhadas azuis representam o caminho elas.



**Figura 11:** Ips na parte do violoncelo no III mov. do Op.11 de Webern.

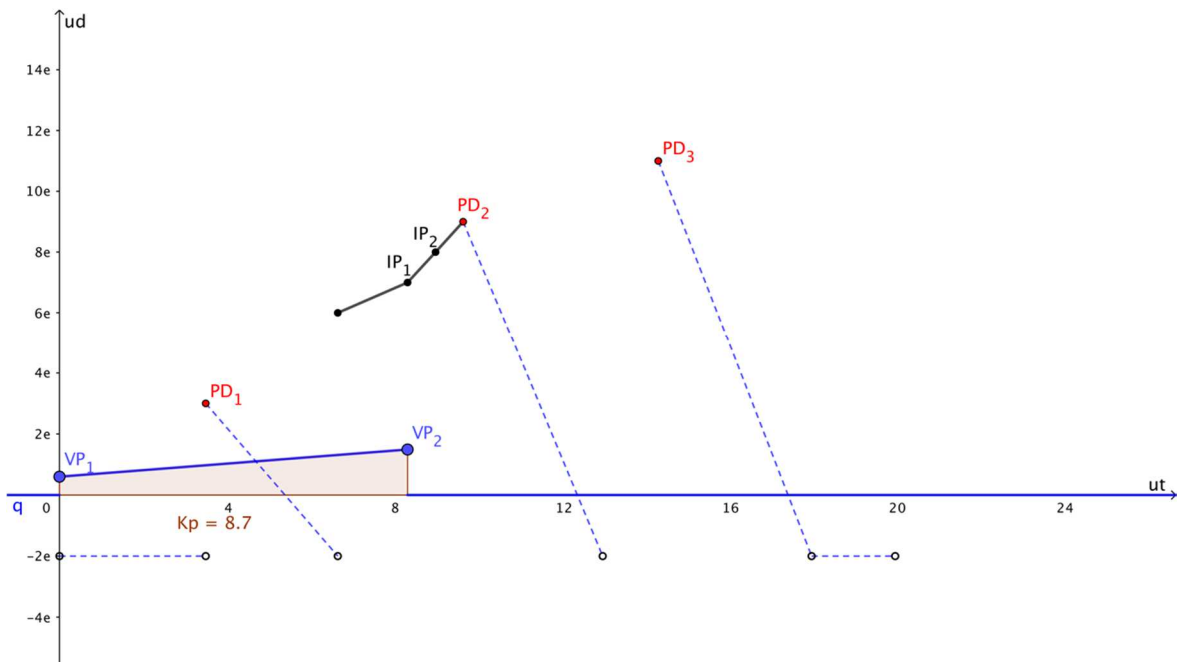
A partir dos índices, são revelados três pontos de velocidade de perturbação. Como a maior diferença está entre as retas que contém os  $IP_2$  e  $IP_3$  respectivamente, a maior diferença entre as taxas de variação (velocidades de perturbação) está entre os  $VP_3$  e  $VP_4$  (Figura 12). Isso não significa musicalmente que os elementos “correram” mais rápido, mas sim, que a diferença entre a suas velocidades é maior. Esse é o ganho deste dado no sentido composicional, pois ao extrair o modelo, a informação que apreendida será a relação das velocidades em si, e não as figuras.

O fator de perturbação revelado foi de 4.2. O fator quantifica a relação entre os VPs, traz para o reino da abstração total matemática a área percorrida pelos VPs integrando a função polinomial que conecta os VPs. Sua aplicação musical é a comparação de trechos, por exemplo, através do número real obtido.



**Figura 12:** Vps e Kp na parte do violoncelo no III mov. do *Op.11* de Webern.

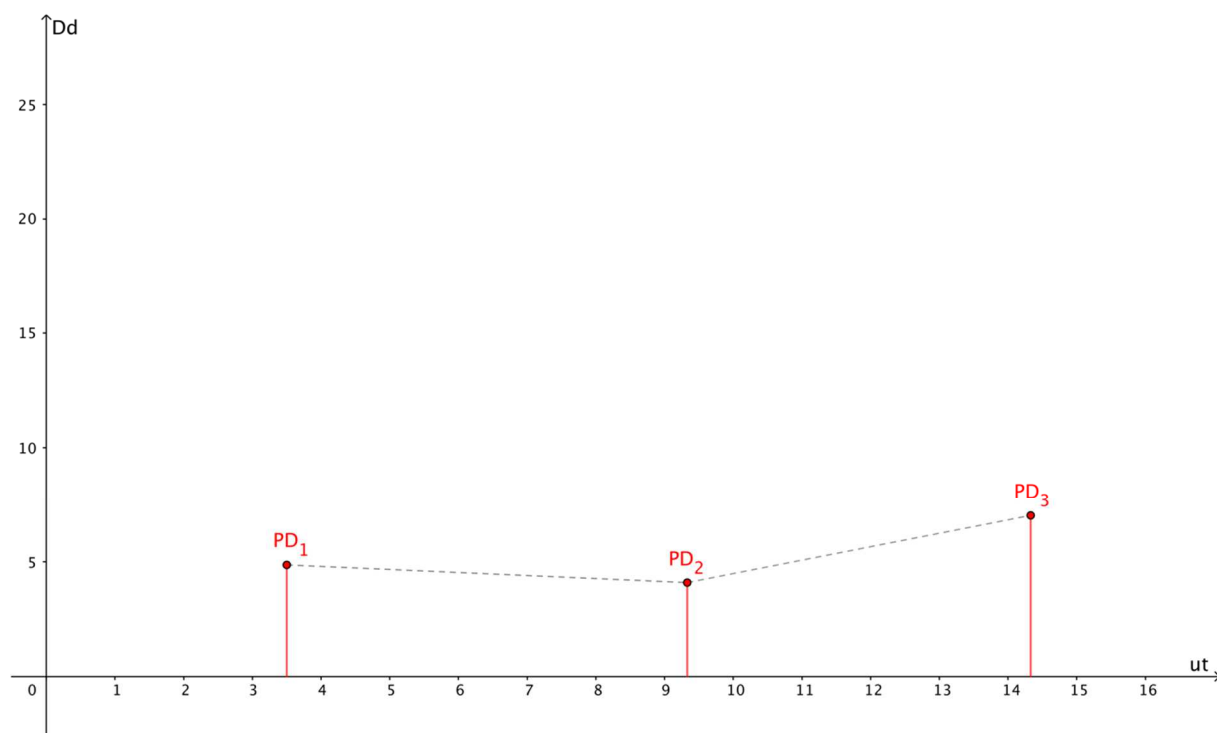
Tomando a parte do piano, são revelados três pontos de distorção (c. 2-3, 5-6 e 7-9) e apenas dois índices perturbação (c. 4-5). O conjunto (014) fica evidente nos dois primeiros PD<sub>1</sub> e PD<sub>2</sub> enquanto o conjunto (0128) aparece no PD<sub>3</sub>. Os pontos de distorção estão aqui representados em duas dimensões, mas sua colocação no plano se dá no eixo z, conferindo a tridimensionalidade ao gráfico (Figura 13). Até o presente momento uma fórmula para esta representação não foi criada.



**Figura 13:** Ips, Vps e PDs na parte do piano do III mov. do *Op.11* de Webern.

Já as velocidades de perturbação têm pouca variação e, diferentemente da parte do violoncelo, criam uma reta. Isto porque só existem dois pontos para as velocidades. Ainda assim, entre o fator de perturbação revelado na parte do piano, 8,7, é maior do que o revelado na parte do violoncelo. Esse é um caso particular, pois o primeiro ponto da velocidade de perturbação é sempre iniciado em 0 (zero) no eixo x. Nesse caso, a posição entre os dois pontos que representam as velocidades foi expandida em relação ao acontecimento do evento na partitura. Contudo, as retas que determinam as trajetórias os índices de perturbação não são alterados, e como as velocidades são derivadas destas retas (funções de primeiro grau), suas relações são mantidas.

Contudo, a características mais relevantes reveladas pelo gráfico são a pouca movimentação dos pontos de distorção seguida de pausas e o uso de dinâmicas em *ppp*. Essa última constatação fica evidente se plotarmos um gráfico  $Dd \times ut$ . Isso porque, nos pontos de distorção, são levados em consideração a quantidade de notas (massa sonora), a quantidade de semitons (volume sonoro) e o coeficiente de intensidade. Considerando as notas do violoncelo e do piano, (c. 2-3; 5-6), observamos que o maior ponto de distorção ocorre quando apenas o piano toca (c. 7-9), o que era de se esperar, já que volume sonoro (quantidade de semitons) é menor (Figura 14).



**Figura 14:** Pontos de distorção no III mov. do *Op.11* de Webern.

O DS possui ferramentas específicas de manipulação de material composicional, esse é o ponto onde o Pensamento Sincrético se funde a teoria e não existem manipulações matemáticas. Contudo, a partir da análise observou-se que é possível extrair uma matriz com parâmetros de perturbações e aplicar como modelagem sistêmica, por exemplo.

Dentre os modelos matemáticos apresentados, de fato, o que tem maior representatividade composicional é o índice de perturbação, pois é ele quem define as mudanças e o grau das mudanças. Uma análise harmônica sobre “Garota de Ipamena” pode ser realizada levando em conta, por exemplo, o índice de perturbação de dominantes secundários. Isso revela que a perturbação não tem relação com o ritmo em si, mas com qualquer parâmetro que se desenvolva em um tempo emergente e um espaço não emergente.

Os pontos de distorção também estão bem próximos do trato composicional. Utilizando as concepções da Análise Particional, os pontos de distorção conferem aglomeração ou dispersão aos elementos envolvidos.

Nesse sentido, uma matriz do tipo:  $E_n = [Ip \quad Ut \quad Pd]$  foi criada, onde:  $E_n$  simboliza evento;  $Ip$  – índice de perturbação;  $Ut$  – unidade de tempo; e,  $Pd$  – ponto de distorção. A unidade de tempo da matriz, segue o mesmo princípio dos gráficos no DS, simboliza alguma unidade de medição do tempo (emergente), que no caso, para facilitar a manipulação, são os segundos.

Aplicando a matriz ao piano, teremos:

|       |      |      |      |
|-------|------|------|------|
| $E_1$ | 0    | 2.5  | 4.86 |
| $E_2$ | 0.6  | 2.33 | 0    |
| $E_3$ | 1.49 | 1    | 0    |
| $E_4$ | 0    | 3.32 | 4.09 |
| $E_5$ | 0    | 3.66 | 7.02 |

Aqui surgem diversas aplicações: multiplicação de matrizes, determinantes, matrizes inversas, dentre outras. As aplicações adentrariam no campo da álgebra, alcançariam resultados significativamente mais abstratos, contudo, a teoria em si ganharia, em níveis mais razoáveis, maior aplicabilidade.

### 3. Conclusões

A escolha da obra em si foi proposital, certamente, pelo seu tamanho. Os modelos matemáticos apresentados são operacionalizados manualmente, e por isso a primeira conclusão revelada é na verdade um dos objetivos mais antigos da referente pesquisa: automatizar o processo de geração de gráficos.

Omitimos as curvas intervalares do movimento, também, pelo seu tamanho e porque analisamos as perturbações rítmicas da obra. O seu tamanho não implica que as curvas intervalares são irrelevantes, foi apenas uma opção didática ao lidar com tantos conceitos.

A análise revelou que a obra tende a obedecer mais a padrões de pontos de distorção do que índices de perturbação. Isso significa que, pode ser que Webern tenha pensado mais em ternos de blocos do que em linhas, empregando seus conjuntos (majoritariamente 014) em forma de blocos sonoros. Os índices de perturbação são pequenos (também pelo alto uso de pausas), revelando que as mudanças entre e a variação rítmica dos elementos são poucas.

A teoria do Domínio Sonoro abre diálogos com diferentes frentes no âmbito das pesquisas em música, tais como: aplicações em Modelagem Sistêmica e Análise Particional, sobretudo na proximidade entre as instâncias organizacionais do Pensamento Sincrético. Além destas, o DS abre canal de comunicação com outras pesquisas desenvolvidas no MusMat<sup>16</sup>, procedimentos analíticos e composicionais embasados em processamento de dados via manipulação e modelagem matemática, com a filosofia da música no que se refere a concepção do tempo musical, com abordagens relativas ao gesto textural e a textura em si, cognição musical, entre outros. Desta maneira, a presente pesquisa se justifica no sentido de promover a criação de um novo conceito, aberto a diversas aplicações que não serão abarcadas neste trabalho, mas que poderão ser contempladas em pesquisas futuras.

### Referências:

BERRY, Wallace. **Structural functions in music**. Nova York: Dover, 1976

CARNAP, Rudolf. **An Introduction to the Philosophy of Science**. New York: Dover Publications, 1995.

---

<sup>16</sup> Grupo de Pesquisa do programa de Pós-Graduação em Música da UFRJ, com intuito de desenvolver pesquisas no âmbito da formalização de processos musicais (composicionais e analíticos) utilizando modelos matemáticos. Maiores informações em [www.musmat.org](http://www.musmat.org)

DEBUSSY, C. **Syrinx**. Paris: Éditions Jobert, 1927. Partitura

EWELL, Philip A. Ewell, Russian Pitch-Class Set Analysis and the Music of Webern. **A Music- Theoretical Matrix: Essays in Honor of Allen Forte (Part IV)**, 219–276, 2013.

HALAC, Jose. 2013. **Pensamiento sincrético**. Disponível em: <http://www.josehalac.com.ar/research.html>. Acesso em: 14/12/14.

GENTIL-NUNES, Pauxy. **Análise Particional**: uma mediação entre composição e a teoria das partições. Rio de Janeiro, 2009. 371f. Tese (Doutorado em Música) Universidade Federal do estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2009

KRAMER, Jonathan D. **The Time of Music**: New Meanings, New Temporalities, New Listening Strategies. New York: Schirmer Books, 1988.

MORGAN, Robert. **Musical Time/Musical Space**. Critical Inquiry, 6. p. 527-38, 1980.

SHAFER, S. Inicial]. **Analysis of Webern's Pieces for Cello and Piano Op. 11, No. 1**. Disponível em: < <http://www.davidbardschwarz.com/pdf/shafer.one.pdf>>. Acesso em: 06/06/17

SMOLIN, Lee. **Time Reborn**. New York: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 2013.

XENAKIS, Iannis. **Formalized Music**. Bloomington: Indiana University Press, 1990.

WEBERN, A. **Drei Kleine Stücke Op. 11** (Violoncell und Klavier). Universal Edition, 1952. Partitura

WINTLE, Christofer. An Early Version of Derivation: Webern's Op. 11/3. **Perspectives of New Music**, Vol. 13, No. 2, pp. 166-177, 1975.