

Análise intravetorial: breve revisão e relações gráficas em operações de substituição

André Codeço dos Santos
andrecodeco@gmail.com

Resumo: O presente artigo tem por objetivo expor os fundamentos da análise intravetorial e suas relações gráficas específicas com as operações de substituição. Tal mecanismo analítico está inserido na Teoria do Domínio Sonoro (CODEÇO, 2019) um recém estruturado campo de pesquisa ligado tanto a análise quanto a composição musical, e que é formalizado por outros mecanismos analíticos modelados matematicamente. Foram consideradas quatro operações de transformação (transposição, inversão, retrogradação e rotação) e, a partir de argumentações matemáticas, foram propostos gráficos que expõem a informações contidas nos intravetores.

Palavras-chave: Teoria do domínio sonoro. Análise intravetorial. Análise musical. Matemática e música.

Intravectorial Analysis: A Survey and Graphic Relations in Substitution Operations

Abstract: This article aims to expose the fundamentals of intravector analysis and its specific graphic relationships with substitution operations. Such analytical mechanism is included in the Sonic Domain Theory (CODEÇO, 2019), a newly structured field of research linked to both analysis and musical composition, and which is formalized by other analytical mechanisms mathematically modeled. Four transformation operations were considered (transposition, inversion, retrogradation and rotation) and, based on mathematical arguments, graphics were proposed exposing the information contained in the intravectors.

Keywords: Sonic domain theory, intravectorial analysis. Musical analysis. Mathematics and music.

1. Introdução

A análise intravetorial¹ é uma ferramenta analítica que tem por objetivo descrever algebricamente relações derivativas entre as componentes de um material musical. No âmbito da Teoria do Domínio Sonoro (doravante TDS), tais materiais são denominados PEC (potencial expressivo compositivo)² e, por componentes, são

¹ O nome intravetorial pode ser redundante, pois por si só um vetor é o resultado de operações que determinam a distância, o sentido e a direção de um segmento de reta entre pontos. Em si, o vetor já possui alguma característica interna. No entanto, no contexto da Teoria do Domínio Sonoro, o nome intravetorial é mais revelador do que redundante, pois expõe informações fundamentais entre os PECs, quando escritos vetorialmente e/ou matricialmente. Esta nomenclatura é aplicada também em diversas subáreas das Ciências Biológicas.

² O termo PEC é proposto, originalmente, por HALAC (2013). Na estruturação da TDS (CODEÇO, 2019) o termo é ampliado e definido conceitualmente e matematicamente. A esta última qualidade, quer se dizer que o PEC é notado matricialmente.

entendidos os parâmetros altura, duração e dinâmica³. Isto é, o PEC é um material musical constituído a partir da confluência de três parâmetros: altura, duração e dinâmica. Cada parâmetro é registrado no formato vetorial estipulando-se que: as alturas são simbolizadas pelos elementos $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$; as durações pelos elementos $t_1, t_2, t_3 \dots t_n$, e; as dinâmicas são representadas pelos elementos $d_1, d_2, d_3 \dots d_n$ ⁴. Ao agrupar os parâmetros, uma matriz $A_3 \times n$ é revelada.

$$A = \begin{bmatrix} p \\ t \\ d \end{bmatrix} = \text{PEC} \text{ ou } A^t = [p \ t \ d] = \text{PEC}$$

Cada elemento é alocado em uma linha da matriz e as colunas revelam os vetores que formam a matriz PEC (Figura 1).

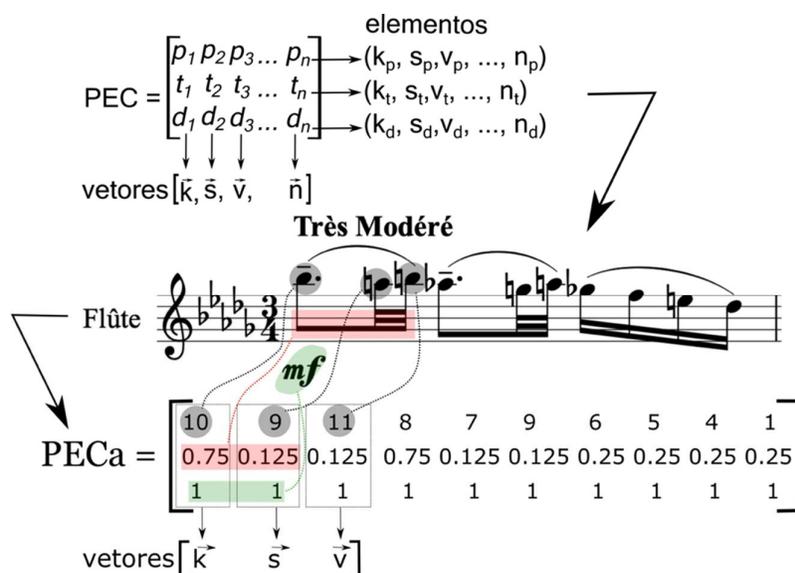


Figura 1: Trecho de *Syrinx*, de Debussy descrito como PECa. Acima, a descrição matricial do PEC. Na sequência, as notas dentro dos círculos pretos são representadas como classes de altura, as durações dentro do retângulo rosa são representadas por relações de equivalência e, por fim, a dinâmica, na elipse verde, é representada por relação de equivalência. Os retângulos pontilhados revelam os vetores $\vec{k}, \vec{s}, \vec{v}$.

A componente altura se baseia na consagrada notação com inteiros (FORTE, 1973) e a notação da componente temporal é dada em segundos, ou seja, a quantidade de tempo gasta em cada evento tendo o segundo (s) como unidade de

³ Não queremos dizer que apenas estes parâmetros podem ser considerados ou que há detrimento de um em relação ao outro. O PEC é escrito a partir desses três componentes, mas não precisa se limitar a eles. Para mais informações, ver Codeço, 2019.

⁴ Onde p é a abreviação para *pitch*, t é a abreviação para *time* e d é a abreviação para *dynamics*.

medição. Já a componente dinâmica é descrita a partir de uma tabela específica⁵.

2. A análise intravetorial

A descrição realizada pela análise intravetorial incorpora operações consagradas no ambiente da teoria e da análise musical, tais quais: transposição, inversão, retrogradação e rotação⁶. As operações são decodificadas através de vetores específicos e a esse processo de decodificação chamamos de análise intravetorial.

Tomemos como exemplo um PECA formado pelos vetores $\vec{l}, \vec{k}, \vec{m}$, e que $\vec{k} = (p_{11}, t_{11}, d_{11})$, $\vec{l} = (p_{12}, t_{12}, d_{12})$, $\vec{m} = (p_{13}, t_{13}, d_{13})$. Tomemos outro PECB formado pelos vetores $\vec{q}, \vec{s}, \vec{z}$, e que $\vec{q} = (p_{21}, t_{21}, d_{21})$, $\vec{s} = (p_{22}, t_{22}, d_{22})$, $\vec{z} = (p_{23}, t_{23}, d_{23})$. Então:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{n}), \vec{v} = (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \dots, \mathbf{n}), \vec{w} = (\mathbf{e}, \mathbf{f}, \dots, \mathbf{n})^T \therefore \\ p_{12} - p_{11} &= \mathbf{a}, p_{13} - p_{12} = \mathbf{b}, p_n - p_n - 1 = \mathbf{n}_p; \\ t_{12} - t_{11} &= \mathbf{c}, t_{13} - t_{12} = \mathbf{d}, t_n - t_n - 1 = \mathbf{n}_t; \\ d_{12} - d_{11} &= \mathbf{e}, d_{13} - d_{12} = \mathbf{f}, d_n - d_n - 1 = \mathbf{n}_d. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{n}_1), \vec{v}_1 = (\mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{n}_1), \vec{w}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{n}_1) \therefore \\ p_{22} - p_{21} &= \mathbf{a}_1, p_{23} - p_{22} = \mathbf{b}_1, p_n - p_n - 1 = \mathbf{n}_{1p}; \\ t_{22} - t_{21} &= \mathbf{c}_1, t_{23} - t_{22} = \mathbf{d}_1, t_n - t_n - 1 = \mathbf{n}_{1t}; \\ d_{22} - d_{21} &= \mathbf{e}_1, d_{23} - d_{22} = \mathbf{f}_1, d_n - d_n - 1 = \mathbf{n}_{1d} \end{aligned}$$

Podemos generalizar da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= [(\vec{l}_p - \vec{k}_p), (\vec{m}_p - \vec{l}_p)]; \vec{v} = [(\vec{l}_t - \vec{k}_t), (\vec{m}_t - \vec{l}_t)], e; \\ \vec{w} &= [(\vec{l}_d - \vec{k}_d), (\vec{m}_d - \vec{l}_d)]. \end{aligned}$$

Temos também que,

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= [(\vec{s}_p - \vec{q}_p), (\vec{z}_p - \vec{s}_p)]; \vec{v}_1 = [(\vec{s}_t - \vec{q}_t), (\vec{z}_t - \vec{s}_t)], e; \\ \vec{w}_1 &= [(\vec{s}_d - \vec{q}_d), (\vec{z}_d - \vec{s}_d)]. \end{aligned}$$

⁵ No âmbito da TDS, é considerado o *p-space* (MORRIS, 1987) no que diz respeito a componente altura. No caso da componente temporal, adota-se que a unidade tempo do trecho em questão valerá 1 segundo e daí afluem todas as proporções. Já em relação a componente dinâmica, foi criada uma tabela específica. Para ter acesso a esta tabela e mais informações a respeito dos fundamentos da notação matricial do PEC, ver Codeço, 2019.

⁶ Na TDS, contudo, são propostas mais duas operações: relocação positiva e relocação negativa (ver, CODEÇO, 2019).

⁷ Onde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \dots, \mathbf{n}$ são escalares, ou seja, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \dots, \mathbf{n}) \in \mathbf{R}$.

Temos, portanto, que $S = \{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}), (\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1) \dots, (\vec{u}_n, \vec{v}_n, \vec{w}_n)\}$. Chamamos o conjunto S de conjunto de transformações vetoriais, insto é, o conjunto S é o conjunto das relações intravetoriais que mapeiam as derivações entre os PECs componente a componente (Tabela 1).

Tabela 1: Exemplo de aplicação intravetorial. Utilizamos cores diferenciadas para auxiliar na exposição das operações.

| PECs | Vetores | Operações | | Intravetores | |
|------|-------------------------|---|------------------------|---------------------------|---|
| PECa | $\vec{k} = (2, 1, 2)$ | $[(\vec{l}_p - \vec{k}_p), (\vec{m}_p - \vec{l}_p)];$ | $(1 - 2), (3 - 1)$ | $\vec{u} = (-1, 2)$ | S |
| | $\vec{l} = (1, 2, 2)$ | $[(\vec{l}_t - \vec{k}_t), (\vec{m}_t - \vec{l}_t)];$ | $(2 - 1), (1 - 1)$ | $\vec{v} = (1, 0)$ | |
| | $\vec{m} = (3, 1, -1)$ | $[(\vec{l}_d - \vec{k}_d), (\vec{m}_d - \vec{l}_d)].$ | $(2 - 2), (-1 - 2)$ | $\vec{w} = (0, -3)$ | |
| PECb | $\vec{q} = (1, 1, 2)$ | $[(\vec{s}_p - \vec{q}_p), (\vec{z}_p - \vec{q}_p)];$ | $(2 - 1), (0 - 2)$ | $\vec{u}_I = (1, -2)$ | |
| | $\vec{s} = (2, 0.5, 2)$ | $[(\vec{s}_t - \vec{q}_t), (\vec{z}_t - \vec{q}_t)];$ | $(0.5 - 1), (1 - 0.5)$ | $\vec{v}_I = (-0.5, 0.5)$ | |
| | $\vec{z} = (0, 1, 1)$ | $[(\vec{s}_d - \vec{q}_d), (\vec{z}_d - \vec{q}_d)].$ | $(2 - 2), (1 - 2)$ | $\vec{w}_I = (0, -1)$ | |

Na primeira e segunda colunas da tabela 1, temos os PECa e o PECb e seus respectivos vetores formadores. Nas colunas do meio são expostas as operações entre os vetores originais, tomando componente a componente. Nas duas últimas colunas são expostos os intravetores resultantes e o conjunto **S**, que representa o conjunto de intravetores obtidos. Os intravetores obtidos revelam, portanto, as relações de transformação agrupando as componentes (ou parâmetros). O intravetor $\vec{u} = (-1, 2)$ por exemplo, expõe as transformações relativas a componente altura do PECa, enquanto o intravetor $\vec{u}_I = (1, -2)$ expõe as transformações ocorridas na componente altura que pertence ao PECb. Comparando os dois vetores, uma relação de inversão é revelada (pois $\vec{u} = (-1, 2)$ e $\vec{u}_I = (1, -2)$) e esta é uma das relações que nos interessa. Mais adiante, através de relações intrínsecas aos intravetores, relacionaremos as operações de transposição, inversão, retrogradação e rotação (chamadas de operações de substituição⁸ no âmbito da TDS).

Os números negativos podem causar alguma estranheza, porém, eles revelam uma característica intrínseca à análise intravetorial. Seja em qualquer componente, os intravetores revelam o sentido da transformação ocorrida. No caso do intravetor $\vec{u} = (-1, 2)$, a informação revelada é que entre as componentes altura e temporal do PECa houve, primeiro, um movimento intervalar decrescente de 1 semitom, e, em seguida, um movimento intervalar ascendente de 2 semitons. Comparando com o intravetor \vec{u}_I

⁸ Toussiant (2013). De acordo com Toussiant (2013, p. 253), essa distância é “definida como o mínimo número de edições (ou mutações) necessárias para converter uma sequência em outra”. Toussiant categoriza todas as derivações possíveis em três categorias: expansão, substituição e retração. Para mais informações sobre como todas as categorias são usadas no âmbito da TDS, ver Codeço, 2019.

= (1, -2) temos o caminho inverso. Ou seja, na componente altura do PEC b , temos primeiramente o intervalo ascendente de 1 semitom sendo seguido por um intervalo descendente de 2 semitons.

3. Relações gráficas

A principal característica das operações de substituição é a invariância da duração dos PECs, ou seja, as operações de substituição se dão exclusivamente sobre a componente das alturas e/ou na componente das dinâmicas. Quando há variação temporal, haverá operações de expansão ou retração (CODEÇO, 2019). Por conta dessas qualidades únicas, as operações de substituição revelam relações singulares quando aplicada a análise intravetorial. No presente trabalho, será considerada apenas a componente altura.

Transposição: A operação de substituição por transposição não difere da concepção tradicional de transposição usada no contexto musical. “Tradicionalmente, o termo transposição refere-se à transposição de uma linha de notas (...) em ordem, a algum intervalo” (STRAUS, 2013, p. 41). Straus (2013) aponta a diferença entre a transposição entre uma linha de notas e uma linha de classes de notas, contudo, no contexto da TDS, estamos considerando o registro⁹. Assim, valerão as relações reais, nota a nota.

Assim, é proposto o seguinte exemplo:

$$\text{Seja um PEC } a = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_n \\ t_{11} & t_{12} & \dots & t_n \\ d_{11} & d_{13} & \dots & d_n \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\text{PEC } b = \begin{bmatrix} \pm\alpha + (p_{11} & p_{12} & \dots & p_n) \\ t_{11} & t_{12} & \dots & t_n \\ \pm\alpha + (d_{11} & d_{13} & \dots & d_n) \end{bmatrix}.$$

A transposição ocorre nas componentes altura e dinâmica, expostos no PEC b (em relação ao PEC a), pela adição de um escalar (α) positivo ou negativo. Seja, por exemplo (Figura 2):

⁹ Os mecanismos analíticos da TDS operam no p -space (MORRIS, 1987). Assim, não aplicaremos as relações da operação de transposição elencadas por Straus (2013), como por exemplo, a simetria transpositiva. Isso porque estamos caminhando em direção oposta a grande parte da aplicação da teoria dos conjuntos (que estrutura o conceito de conjunto de classe de notas tendo como premissa a não consideração dos registros). Nossa proposta é exatamente apontar o sentido e direção dos movimentos intervalares, seja na componente altura ou na componente dinâmica, e revelá-los pela análise intravetorial. Empregar a abordagem de Straus desconfiguraria por inteiro o uso da análise intravetorial como mecanismo analítico. Nesse sentido, a operação de substituição por transposição pode ser positiva ou negativa e terá notação diferenciada da tradicional.

$$\text{o } PECa = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e um } PECb = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 1 & 0.5 & 0.5 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

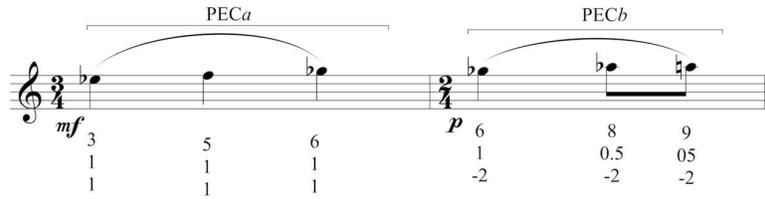


Figura 2: Exemplo de transposição entre os PECa e PECb.

A operação de substituição por transposição ocorrida na componente altura fica descrita como $[3 \ 5 \ 6] \rightarrow (\mathbf{S})\mathbf{T}_3 = [6 \ 8 \ 9]$. Aplicando a análise intravetorial, temos que: $\vec{u} = (2 \ 1)$ vindo do PECa, e; $\vec{v} = (2 \ 1)$ vindo do PECb. Temos que $\vec{u} = \vec{v}$ e generalizamos, portanto, que, no sentido intravetorial, as operações de transposição são estabelecidas da seguinte forma: $\vec{u} = \vec{v}$.

Quando tomamos a semirreta \overline{AB} formada pelos vetores \vec{u} e \vec{v} escrevendo, respectivamente, como $f(x)$ e $g(x)$, temos que a transposição de \vec{u} para \vec{v} é revelada como $f(x) = g(x)$.

Inversão: A inversão fica estabelecida quando:

$$\begin{bmatrix} p_{11}, (p_{11} - [p_{12} - p_{11}]), (p_{12} - [p_n - (p_n - 1)]) \\ t_{11}, (t_{11} - [t_{12} - t_{11}]), (t_{12} - [t_n - (t_n - 1)]) \\ d_{11}, (d_{11} - [d_{12} - d_{11}]), (d_{12} - [d_n - (d_n - 1)]) \end{bmatrix} = PECa$$

Tomemos os seguintes PECs como exemplos (Figura 3):

$$PECa = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } PECb = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0.5 & 0.5 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

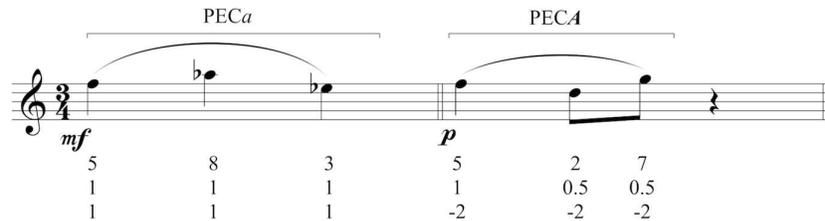


Figura 3: Exemplo de inversão entre os PECa e PECb.

Isolando as componentes altura, temos que: $PECa \rightarrow (\mathbf{S})\mathbf{I} = PECb$. Ou seja, $[5 \ 8 \ 3] \rightarrow (\mathbf{S})\mathbf{I} = [5 \ 2 \ 7]$. A relação intravetorial resultante na primeira componente é $[3 \ -5] = \vec{u}$ e na segunda componente $[-3 \ 5] = \vec{v}$. Deste modo, $\vec{v} = -\vec{u}$ e $\vec{u} = -\vec{v}$, pois

temos que $(a, b) \in \vec{u}$ e $(-a, -b) \in -\vec{u}$. Isto é, considerando a análise intravetorial, a inversão revela vetores simétricos¹⁰, com direções iguais, porém, com sentidos diferentes. Graficamente, a simetria dos vetores evidenciada pela análise intravetorial, revelará uma reflexão¹¹ da semirreta \overrightarrow{AB} em torno do eixo y . Portanto, ao considerar a semirreta \overrightarrow{AB} como uma função $f(x)$, a operação de substituição por inversão entre os vetores \vec{u} e $-\vec{u}$ pode também ser descrita como $f(x) \neq g(x) = -f(x)$.

Retrogradação: A retrogradação fica estabelecida quando

$$\begin{bmatrix} \dots p_n & p_{12} & p_{11} \\ \dots t_n & t_{12} & t_{11} \\ \dots d_n & d_{12} & d_{11} \end{bmatrix} = PECA$$

Tomemos por exemplo os seguintes PECs (Figura 4):

$$PECa = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } PECb = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Temos, na componente das alturas, que: $PECa \rightarrow (\mathbf{S})\mathbf{R} = PECb$. Mais precisamente (em relação a componente altura), temos que: $[2 \ 5 \ 0] \rightarrow (\mathbf{S})\mathbf{R} = [0 \ 5 \ 2]$. Aplicando a análise intravetorial temos que, de $[2 \ 5 \ 0]$ obtém-se $\vec{u} = [3 \ -5]$, e de $[0 \ 5 \ 2]$ obtém-se $\vec{v} = [5 \ -3]$. Temos, portanto que $(a, b) \in \vec{u}$, $(-b, -a) \in \vec{v}$.

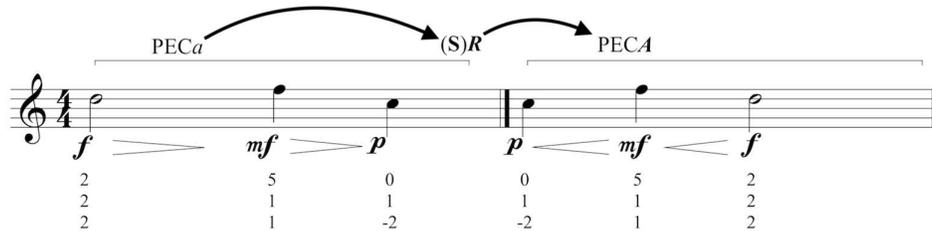


Figura 4: Exposição da operação de substituição por retrogradação do PECA em relação ao PEC(A).

Se considerarmos a componente altura, podemos inferir que a operação de substituição por retrogradação é estabelecida a partir de um tipo especial de inversão realizada em três passos¹²: Seja δ a componente $[2 \ 5 \ 0]$. Da aplicação intravetorial temos $\vec{u} = [3 \ -5]$. Aplicando uma inversão sobre δ temos $[2 \ -1 \ 4] = \delta'$ e, intravetorialmente,

¹⁰ Um elemento inverso, em Matemática, é aquele cujo uso em uma operação binária matemática bem definida resulta no elemento neutro específico dessa operação.

¹¹ A reflexão é um tipo de transformação entre funções em geral que são graficamente plotadas em um gráfico bidimensional. A reflexão ocorre através de uma reta chamada eixo. O ponto original e seu correspondente na reflexão tem a mesma distância em relação ao eixo.

¹² Porém, partindo direto da primeira geração de intravetores, a inversão pode ser alcançada em dois passos: 1) uma inversão $(a, b) \rightarrow (-a, -b)$, e; 2) seguida por uma retrogradação entre os elementos do intravetor conectado ao PEC original, ou seja: $(-a, -b) \rightarrow (-b, -a)$.

chegamos a $\vec{z} = [-3 \ 5]$, conforme esperado. Aplicando a retrogradação a δ' encontramos $[4 \ -1 \ 2] = \delta''$ e analisando intravetorialmente temos que $\vec{s} = [-5 \ 3]$. Invertendo δ'' encontramos $[4 \ 9 \ 6] = \delta'''$, o que finalmente nos revela intravetorialmente $\vec{v} = [5 \ -3]$. Contudo, está claro que a retrogradação direta de δ é diferente de δ''' , pois $[0 \ 5 \ 2] \neq [4 \ 9 \ 6]$. Isso ocorre porque a análise intravetorial revela relações intervalares (relações espaciais) e relações de sentido (movimento ascendente ou descendente). Assim, de $[0 \ 5 \ 2]$ e $[4 \ 9 \ 6]$ advém o mesmo intravetor $[5 \ -3]$ ¹³. Assim, trataremos a operação substituição por retrogradação de maneira direta, onde $(a, b) \in \vec{u}$, $(-b, -a) \in \vec{v}$.

Partindo deste ponto, descreveremos este tipo único de inversão adotando a simbologia \vec{u} referente ao intravetor advindo da componente retrogradada. Esse símbolo implica a relação de rotação entre as semirretas obtidas plotando os intravetores no eixo xy . Estranhamente (pois a relação de retrogradação anuncia uma mudança de sentido e manutenção da direção), não há mudança de sentido, nem mudança de direção, apenas uma rotação da semirreta em torno de um do eixo z (considerando três dimensões) com deslocamento do ponto médio da semirreta

A fim de tornar essa descoberta visível, tomemos a semirreta \overline{AB} que formada pelas componentes do vetor \vec{u} descrita pela função $f(x)$, e a semirreta \overline{CD} que é formada pelas componentes do vetor \vec{v} descrita pela função $g(x)$. Nesse caso, observamos que $f(x) \neq g(x)$ (Figura 6)¹⁴.

No entanto, ao medir as normas dos vetores¹⁵, é observado que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. De fato, os intravetores revelados pelas operações de substituição por transposição, inversão e retrogradação terão a mesma norma. Porém, as relações de semelhança e/ou simetria entre os intravetores nos casos da transposição e inversão são mais claras. No caso da retrogradação a igualdade das normas revela a semelhança e a simetria entre os intravetores.

¹³ Nesse sentido, seria possível abordar certos intravetores como sendo parte de uma classe de conjunto de intravetores. Ainda assim, poderíamos partir de $[4 \ 9 \ 6]$ e chegar a componente já retrogradado. Considerando $\delta_i = [x_i \ y_i \ z_i] = [2 \ 5 \ 0]$ e $\vec{v} = [5 \ -3] = [a, b]$ o intravetor relativo a $\delta''' = [4 \ 9 \ 6]$, bastaria aplicar a seguinte expressão: $[z_i, (z_i + a), (y_i + b)]$, onde $y_i = (z_i + a)$, que chegaríamos naturalmente a $[0 \ 5 \ 2]$, que é a forma retrogradada de $[2 \ 5 \ 0]$.

¹⁴ Nesse caso, extraímos coordenada a coordenada para construir o gráfico revelado: extraímos a coordenada x do intravetor \vec{u} e igualamos a zero sua coordenada y ; extraímos a coordenada y e igualamos a zero a coordenada x . Assim, os pontos $(2, 0)$ e $(0, 1)$ são os pontos que formam a semirreta descrita pela função $f(x)$ que, por sua vez, contém o intravetor \vec{u} . De maneira análoga, agimos com o intravetor \vec{v} . Desta maneira, $f(x) = g(x)$.

¹⁵ A norma de um vetor é dada por $\|\vec{u}\| = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$, sendo $(a, b) \in \vec{u}$. Assim, nos casos da retrogradação, $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\pm a)^2 + (\pm b)^2} = \|\vec{v}\| = \sqrt{(\pm b)^2 + (\pm a)^2}$. Outra forma de observar a relação entre os intravetores \vec{u} e \vec{v} é comparar a área dos triângulos formados pelos pontos de início e fim das semirretas e o ponto E que é o ponto de intercessão entre as semirretas. Se as normas dos vetores são idênticas e existe uma relação de rotação entre as semirretas \overline{AB} e \overline{CD} , então a área dos triângulos DEB e EAD serão idênticas, conforme mostra a Figura 6.

Dizer que dois vetores têm normas iguais significa dizer que esses vetores têm tamanhos iguais. No contexto da TDS, significa também dizer que as distâncias percorridas entre os elementos das componentes dos PECs originais e dos retrogradados, são idênticas. Essa informação ganha valor quando aplicadas ao contexto da descrição derivativa algébrica proposta na TDS.

Rotação: A rotação é estabelecida a partir da seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \dots p_n & p_{11} & p_{12} & p_n - 1 \\ \dots t_n & t_{11} & t_{12} & t_n - 1 \\ \dots d_n & d_{11} & d_{12} & d_n - 1 \end{bmatrix} = PECa$$

Tomemos como exemplo os seguintes PECs:

Seja o $PECa = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ e o $PEC(A) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (Figura 5).

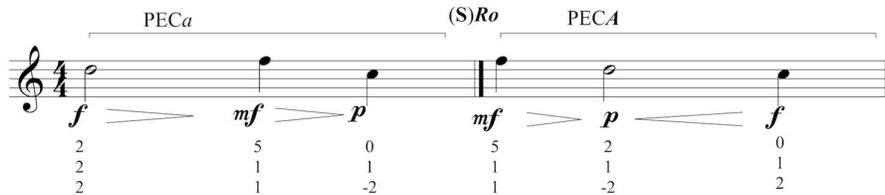


Figura 5: Exposição da operação de substituição por rotação do $PECa$ em relação ao $PEC(A)$.

A operação de substituição por rotação apresentada na Figura 5 é descrita por: $PECa \rightarrow (S)Ro = PEC(A)$. Aplicando a análise intravetorial a componente altura original e a rotacionada, temos respectivamente: $\vec{u} = [3 \ -5]$ e $\vec{v} = [-3 \ -2]$. A princípio, a não há relação de semelhança entre os vetores, contudo, entre os vetores \vec{u} e \vec{v} , existe relação de interseção por intermédio do elemento b do intravetor advindo da componente original.

Tomemos um componente altura original $p_i = [5 \ 3 \ 8 \ 2]$ e suas rotações: $Ro_1(p_i) = [3 \ 8 \ 2 \ 5]$; $Ro_2(p_i) = [8 \ 2 \ 5 \ 3]$, e; $Ro_3(p_i) = [2 \ 5 \ 3 \ 8]$. Partindo de p_i e suas respectivas rotações, temos os seguintes intravetores: $\vec{u} = [-2 \ 5 \ -6]$; $\vec{v} = [5 \ -6 \ 3]$; $\vec{k} = [-6 \ 3 \ -2]$, e; $\vec{w} = [3 \ -2 \ 5]$ (Tabela 2). Se $(a, b, c) \in \vec{u}$; $(b, c, d) \in \vec{v}$; $(c, d, e) \in \vec{k}$, e; $(d, e, f) \in \vec{w}$, as relações intravetoriais das operações de substituição por rotação se estabelecem algebricamente da seguinte maneira:

Seja um componente qualquer $\delta = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \dots x_n]$ e seu intravetor $\vec{u} = (a, b, c, \dots n)$, onde $x_2 - x_1 = a$, $x_3 - x_2 = b$, $x_4 - x_3 = c$, $x_{n-1} - x_n = n$. Temos, então, que $Ro_1(\delta) = \vec{v}$ e $\vec{u} = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, x_{n-1} - x_n) \therefore \vec{v} = (x_3 - x_2, x_4 - x_3, x_{n-1} - x_n, x_2 - x_1)$.

Desta maneira, intravetorialmente, as operações de substituição por rotações se caracterizam pela dessemelhança e assimetria, pois $f(x) \neq g(x)$ e $\|\vec{u}\| \neq \|\vec{v}\|$, a não

ser pelo fato da repetição de todos os elementos dos intravetores, excetuando-se o primeiro, entre o grupo de intravetores ordenadamente rotacionado. Esta característica era esperada, uma vez que as componentes em si são rotacionados no mesmo sentido e direção (repetindo a sequência de valores e excetuando-se o primeiro elemento).

Tabela 2: Exposição dos intravetores \vec{v} , \vec{k} e \vec{w} , a partir das componentes rotacionados e a estrutura intravetorial algébrica implícita. Os elementos de cor vermelha representam os valores que serão descartados na próxima rotação e os elementos restantes aparecerão, inclusive na mesma ordem, na próxima rotação.

| Componente altura original p_i | Rotações | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------|---------------------|
| | $Ro_1(p_i)$ | $Ro_2(p_i)$ | $Ro_3(p_i)$ | |
| [5 3 8 2] | [3 8 2 5] | [8 2 5 3] | [2 5 3 8] | |
| $\vec{u} = [-2 \ 5 \ -6]$ | $\vec{v} = [5 \ -6 \ 3]$ | $\vec{k} = [-6 \ 3 \ -2]$ | $\vec{w} = [3 \ -2 \ 5]$ | Intravetores |
| $\vec{u} = [a, b, c]$ | $\vec{v} = [b, c, d]$ | $\vec{k} = [c, d, e]$ | $\vec{w} = [d, e, f]$ | |

| | | | | |
|-------------|-----|-----|-----|-----|
| $\vec{u} =$ | a | b | c | |
| | | ↓ | ↓ | |
| $\vec{v} =$ | b | c | d | |
| | | ↓ | ↓ | |
| $\vec{k} =$ | | c | d | e |
| | | | ↓ | ↓ |
| | | | d | e |
| | | | | e |
| | | | | f |

**Estrutura
Intravetorial**

$$p_i = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ \dots \ x_n]$$

$$\vec{u}(p_i) = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, x_{n-1} - x_n)$$

$$\vec{v}(Ro_1 p_i) = (x_3 - x_2, x_4 - x_3, x_{n-1} - x_n, x_2 - x_1)$$

A seguir, a exposição de todas as operações e suas relações de similaridade e não similaridade (Figura 6).

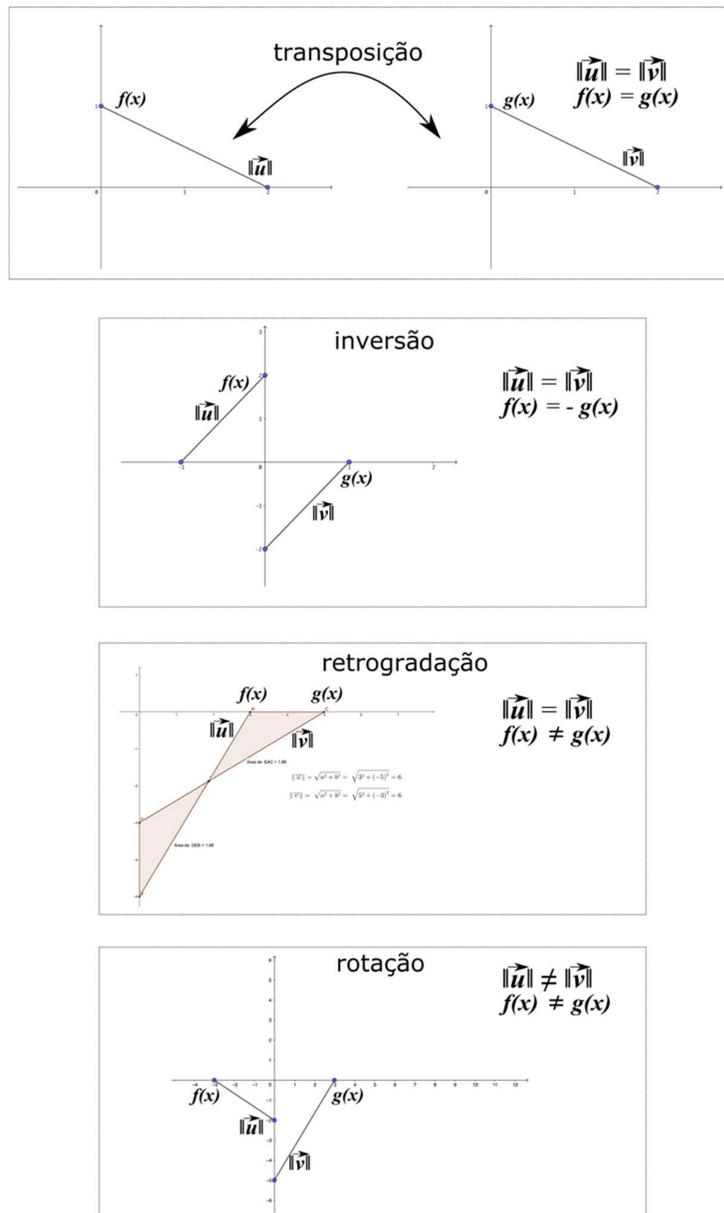


Figura 6: Os gráficos revelam as relações intravetoriais encontradas nas operações de transposição, inversão, retrogradaçãõ e rotação. São evidenciadas similaridade e não similaridade a partir do confronto das funções $f(x)$ e $g(x)$ e das normas de $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{v}\|$.

Conclusões

Duas conclusões gerais são assumidas no presente trabalho. Em primeiro lugar, a qualidade genérica dos dados revelados pela análise intravetorial emprega ao mecanismo aplicabilidade composicional. Isto se deve ao fato de que as relações implícitas nos intravetores não estão necessariamente ligadas à classes de alturas específicas. Na verdade, os intravetores informam sentido, quantidade e direção das transformações existentes. Ressalta-se que apenas a componente altura foi explorada no presente trabalho. Uma análise intravetorial tripartida, isto é, aplicada as três

componentes dos PECs, revelará mais informações passíveis de uso composicional. Aqui está o forte ponto de contato com a modelagem sistêmica, uma vez que esta se dá na entrada de arquétipos musicais extraídos de um processo analítico.

A segunda conclusão diz respeito ao ambiente analítico da TDS. A análise intravetorial pode se aliar a um ou mais processos analíticos distintos da TDS e, no acúmulo de informações, potencializar a teoria tanto em seu teor analítico quanto composicional. Isto quer dizer que a análise intravetorial não apenas fundamenta a descrição algébrica das operações de transformação relatadas na TDS, mas também, corrobora processos analíticos distintos da TDS pela confluência dos resultados. Ou seja, processos não semelhantes revelando resultados semelhantes colaboram para a coesão da TDS.

Referências

- CODEÇO, André. *A Teoria do Domínio Sonoro*. 2019. Tese (Doutorado em música). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2019.
- FORTE, Allen. *The Structure of Atonal Music*. New Haven: Yale University Press, 1973.
- HALAC, Jose. *Pensamiento sincrético*. Disponível em:
<http://www.josehalac.com.ar/research.html>. Acesso em: 14/12/14.
- MORRIS, Robert. *Composition with Pitch-Classes: A Theory of Compositional Design*. New Haven: Yale University Press, 1987.
- TOUSSAINT, Godfried T. *The Geometry of Musical Rhythm: What Makes a “Good” Rhythm Good?* Boca Raton, FL: CRC Press, 2013.